**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***

**Test 6**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$ în care $b_3=12$ și rația $q=2$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $x$ pentru care $f(x)\ge f(1)$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+1)=\log_5(11-x)$.

**5p** **4.** Calculați $C_{11}^9-C_{11}^2$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(1,0)$ și $C(5,4)$. Arătați că triunghiul $ABC$ este dreptunghic isoscel.

**5p** **6**. Arătați că $\dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}=1$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Arătați că $\det A=-1$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A\cdot A\cdot A=A$.

**5p** **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X=I_2+3A$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.

**5p** **a)** Arătați că $2*2020=2$.

**5p** **b)** Demonstrați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numerele naturale $m$ și $n$ pentru care $m*n=13$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2(x-1)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $xe^x\ge e^x-1$, pentru orice număr real $x$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int\limits_0^2 (x+4)f(x)\,dx=6$.

**5p** **b)** Calculați $\int\limits_{-2}^0 f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int\limits_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\dfrac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$.

**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_tehnologic***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Test 6**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} =$ | **3p** |
| | $= \frac{12}{2^2} = 3$ | **2p** |
| **2.** | $2x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$ | **3p** |
| | $x \in [1, +\infty)$ | **2p** |
| **3.** | $x + 1 = 11 - x \Rightarrow 2x = 10$ | **3p** |
| | $x = 5$, care convine | **2p** |
| **4.** | $C_{11}^9 = C_{11}^{11-9} = C_{11}^2$ | **3p** |
| | $C_{11}^9 - C_{11}^2 = C_{11}^2 - C_{11}^2 = 0$ | **2p** |
| **5.** | $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$ | **3p** |
| | $AC^2 = AB^2 + BC^2$ și, cum $AB = BC$, obținem că $\Delta ABC$ este dreptunghic isoscel | **2p** |
| **6.** | $\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45°$ | **2p** |
| | $\frac{\sin 135°}{\cos 45°} = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) =$ | **3p** |
| | $= -9 + 8 = -1$ | **2p** |
| **b)** | $A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ | **3p** |
| | $A \cdot A \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot I_2 = A$ | **2p** |
| **c)** | Matricea $A$ este inversabilă și, cum $A \cdot A = I_2$, obținem că inversa matricei $A$ este matricea $A$ | **2p** |
| | $X = A^{-1} \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A + 3A \cdot A \Leftrightarrow X = A + 3I_2$, deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ | **3p** |
| **2.a)** | $2 * 2020 = 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2020 + 6 =$ | **3p** |
| | $= -4 + 6 = 2$ | **2p** |
| **b)** | $x * y = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$ | **3p** |
| | $= x(y-2) - 2(y-2) + 2 = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **c)** | $(m-2)(n-2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m-2)(n-2) = 11$ | **2p** |
| | Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $m = 3$, $n = 13$ sau $m = 13$, $n = 3$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2e^x+2(x-1)e^x=$ | **3p** |
| | $=e^x(2+2x-2)=2xe^x,\ x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^x\right)=$ | **3p** |
| | $=2e^0=2$ | **2p** |
| **c)** | $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ | **2p** |
| | Pentru orice număr real $x$, $f(x)\ge f(0)$, deci $f(x)\ge -2$, de unde obținem $xe^x-e^x\ge -1$, deci $xe^x\ge e^x-1$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int\limits_0^2 (x+4)f(x)\,dx=\int\limits_0^2 (x+2)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\|_0^2=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{4}{2}+4=6$ | **2p** |
| **b)** | $\int\limits_{-2}^0 f(x)\,dx=\int\limits_{-2}^0 \dfrac{x+2}{x+4}\,dx=\int\limits_{-2}^0 \dfrac{x+4-2}{x+4}\,dx=\int\limits_{-2}^0\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)dx=\left(x-2\ln(x+4)\right)\Big\|_{-2}^0=$ | **3p** |
| | $=0-2\ln 4-(-2)+2\ln 2=2-2\ln 2$ | **2p** |
| **c)** | $\int\limits_{-3}^a f'(x)\cdot f''(x)dx=\dfrac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2\Big\|_{-3}^a=\dfrac{1}{2}\left(f'(a)\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(f'(-3)\right)^2$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$ | **3p** |
| | $f'(x)=\dfrac{2}{(x+4)^2}$, deci $\int\limits_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\dfrac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$ | **2p** |