Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și rația $r=2$.
5p	**2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2-ax+a-1=0$ are soluții reale distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt[3]{x^2+x+2}=1$.
5p	**4.** Calculaţi $2C_4^3-3A_4^2$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+\left(a^2+1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=8$, $BC=8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.
5p	**c)** Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det\left(M(x,y)\right)=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x-1)*(2y+1)=2$ și $(x+y)\circ 4=10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a>1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(a,f(a)\right)$ **nu** este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2x}{2x}$.
5p	**a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx = 20$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}=\frac{(2\cdot 5+4\cdot 2)\cdot 5}{2}=$	**3p**
	$=45$	**2p**
2.	$\Delta=a^2-4(a-1)=(a-2)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^2+x+2}=2\Leftrightarrow x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**
4.	$2C_4^3-3A_4^2=2\cdot\frac{4!}{3!(4-3)!}-3\cdot\frac{4!}{(4-2)!}=$	**2p**
	$=2\cdot 4-3\cdot 4\cdot 3=8-36=-28$	**3p**
5.	$\frac{1}{2}=\frac{a}{a^2+1}\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}\Leftrightarrow 16=\frac{8\cdot 8\cdot\sin B}{2}$	**3p**
	$\sin B=\frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de 30°	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
	$M(x,y)\cdot M(a,b)=(xI_2+yA)(aI_2+bA)=xaI_2+xbA+yaA+ybA\cdot A=(xa+yb)I_2+(xb+ya)A=$ $=M(xa+yb,xb+ya)$ pentru orice numere reale a, b, x şi y	**3p**
c)	$\det(M(x,y))=\begin{vmatrix}x & y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x şi y, deci $(x-y)(x+y)=4$	**1p**
	$M(x,y)\cdot M(x,y)=M(x^2+y^2,2xy)\Rightarrow 2(x^2+y^2+2xy)=8$, deci $(x+y)^2=4$	**2p**
	$x+y=x-y=-2$ sau $x+y=x-y=2$, deci perechile sunt $(-2,0)$ sau $(2,0)$	**2p**
2.a)	$2\circ(1*3)=2\circ(1+3-1)=2\circ 3=2\cdot 3-2-3+2=3$	**2p**
	$(2\circ 1)*(2\circ 3)=(2\cdot 1-2-1+2)*(2\cdot 3-2-3+2)=1*3=1+3-1=3=2\circ(1*3)$	**3p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+2$ şi $x*x=2x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3^{x\circ x}=\left(3^{-2}\right)^{x*x}\Leftrightarrow x\circ x=-2\cdot(x*x)\Leftrightarrow x^2+2x=0$, deci $x=-2$ sau $x=0$	**3p**

c)	$(x-1)*(2y+1)=2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y)\circ 4=10 \Leftrightarrow x+y=4$	**3p**
	Obținem $x=5$, $y=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(5x-3)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2-x+\sqrt{x^2+3}\right)=2$ și $f(1)=2$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=2x-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a)>0$, pentru orice $a\in(1,+\infty)$, obținem că $f'(a)\neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox, pentru orice $a\in(1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=2+\dfrac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2x}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcţiei g	**2p**
b)	$\int\limits_1^4 g(x)dx=f(x)\Big\vert_1^4=f(4)-f(1)=$	**3p**
	$=7-3=4$	**2p**
c)	$\int\limits_1^m f(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_1^m f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_1^m=\dfrac{1}{2}\left(f^2(m)-f^2(1)\right)$	**3p**
	$f^2(m)-9=40 \Leftrightarrow f(m)=-7$, care nu convine sau $f(m)=7$, de unde obținem $m=4$	**2p**