

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Test 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați partea reală a numărului complex  $z = (1 + i\sqrt{3})^2 - (1 - i\sqrt{3})^2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 - 2x$ . Arătați că  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$ .
- 5p** 4. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui  $A$ , care conțin exact 2 numere impare.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$  astfel încât  $\overline{AM} = 2\overline{AB}$ ,  $\overline{BN} = 2\overline{BC}$  și  $\overline{CP} = 2\overline{CA}$ . Știind că  $O$  este un punct oarecare din plan, arătați că  $\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .
- 5p** 6. Știind că  $x \in (\pi, 2\pi)$  și  $\cos 2x = \frac{1}{3}$ , calculați  $\sin x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + ay + 2z = 1 \\ 2x + ay + 5z = b \end{cases}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -3$ .
- 5p** b) Pentru  $a = -1$  și  $b = -2$ , rezolvați sistemul de ecuații.
- 5p** c) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.
2. Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1$ , pentru orice  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Știind că  $(G, *)$  este grup, demonstrați că funcția  $f: M \rightarrow G$ ,  $f(x) = \sqrt{x+1}$  este un izomorfism de la grupul  $(M, \cdot)$  la grupul  $(G, *)$ , unde  $M = (0, +\infty)$  și „ $\cdot$ ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = -xe^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n}$ .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $m$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 2 \ln 2$ .

5p b) Calculați  $\int_1^e \left( f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx$ .

5p c) Determinați  $a \in (0, +\infty)$  pentru care  $\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a$ , unde  $F$  este primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 0$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_mate-info**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 6

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$z = 1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2 - (1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2) = 4i\sqrt{3}$ Partea reală a lui $z$ este 0	3p 2p
2.	$f(3) < 0, f(4) < 0, f(5) < 0$ $f(0) > 0, f(1) > 0$ și $f(2) > 0$ , deci $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$	2p 3p
3.	$(\log_2 x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_2 x = 1$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui $A$ , care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2 \cdot C_5^1 =$ $= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$	3p 2p
5.	$\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AM} + \overline{OB} + \overline{BN} + \overline{OC} + \overline{CP} = \overline{OA} + 2\overline{AB} + \overline{OB} + 2\overline{BC} + \overline{OC} + 2\overline{CA} =$ $= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$	3p 2p
6.	$1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$ Cum $x \in (\pi, 2\pi)$ , obținem $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 10 + 6 + 4 - 4 - 4 - 15 = -3$	2p 3p
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + 5z = -2 \end{cases}$ și, cum $\det(A(-1)) = 3 \neq 0$ , sistemul de ecuații este compatibil determinat $x = -3, y = -14, z = -2$	2p 3p
c)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -3a$ , pentru orice număr real $a$ și, cum $\det(A(a)) = 0$ , obținem $a = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ și $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & b \end{vmatrix} = 0$ , deci $38 - 2b = 0$ , de unde obținem $b = 19$	2p 3p

<b>2.a)</b>	$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} =$	<b>3p</b>
	$= \sqrt{x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1) + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$ , pentru orice $x, y \in G$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)(e^2 - 1) + 1} = x \Leftrightarrow (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x^2 - 1$ , pentru orice $x \in G$ , deci $e^2 - 1 = 1$ și, cum $e \in G$ , obținem $e = \sqrt{2}$	<b>3p</b>
	Cum $\sqrt{2} * x = \sqrt{(2 - 1)(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$ , pentru orice $x \in G$ , obținem că $e = \sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(x) * f(y) = \sqrt{(f^2(x) - 1)(f^2(y) - 1) + 1} = \sqrt{(x + 1 - 1)(y + 1 - 1) + 1} = \sqrt{xy + 1} = f(xy)$ , pentru orice $x, y \in M$ , deci $f$ este un morfism de la grupul $(M, \cdot)$ la grupul $(G, *)$	<b>3p</b>
	$f$ este continuă, $f$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ , $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , deci $f$ este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(M, \cdot)$ la grupul $(G, *)$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x + 1)e^{-x} \cdot (-1) =$	<b>3p</b>
	$= (1 - (x + 1))e^{-x} = -xe^{-x}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n} = \left( \frac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}} \right)^n = \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n$ , pentru orice număr natural $n$	<b>2p</b>
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)e^{-x}) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0$	<b>2p</b>
	Cum $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ , $f(0) = 1$ și $f$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$ , ecuația $f(x) = m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m \in (0, 1)$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx = 2 \ln(x+1) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^e \left( f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$	<b>3p</b>
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$F$ este primitivă a lui $f$ și $F(0) = 0$ , deci $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1)$	<b>1p</b>
	$\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \int_0^1 2F(x)F'(x) dx = F^2(x) \Big _0^1 = \frac{1}{4} + 2 \ln 2 + 4 \ln^2 2$	<b>2p</b>
	$\frac{1}{4} + 2 \ln 2 + 4 \ln^2 2 = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a \Leftrightarrow 4 \ln^2 2 = \ln^2 a$ , deci $\ln a = -2 \ln 2$ sau $\ln a = 2 \ln 2$ , de unde obținem $a = \frac{1}{4}$ sau $a = 4$ , care convin	<b>2p</b>