

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați termenul al cincilea al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, în care $b_1 = 3$ și $b_2 = -6$.
- 5p** 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - 6x + 1 = 0$. Arătați că $x_1 + x_2 - 6x_1x_2 = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 + \sqrt[3]{27x + 8} = 1$.
- 5p** 4. După o scumpire cu 15%, un produs costă 92 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 0)$ și $B(9, a)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care distanța dintre punctele A și B este egală cu 13.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 14$ și unghiul B de măsură egală cu 75° . Determinați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 3(A(x) - I_2)$.
- 5p** c) Arătați că $\det(xA(x) - A(x^2)) \geq 0$, pentru orice număr real x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - \frac{x+y}{3} + 1$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 5 = 14$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $3 * x = -52$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $n * (0 * (3n)) \geq \frac{2n}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 49$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -6(x-1)(x+3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Se consideră punctele $A(-2, f(-2))$ și $B(0, f(0))$. Arătați că tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x - 2$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = 0$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^e (f(x) - x + 2) dx$.
- 5p** c) Demonstrați că orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice este $q = -2$ $b_5 = b_1 q^4 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$	2p 3p
2.	$x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ $x_1 + x_2 - 6x_1 x_2 = 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 3 = 0$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{27x+8} = -1 \Leftrightarrow 27x+8 = -1$ $x = -\frac{1}{3}$	3p 2p
4.	$x + \frac{15}{100} \cdot x = 92$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire $x = 80$ de lei	3p 2p
5.	$AB = \sqrt{144 + a^2}$ $\sqrt{144 + a^2} = 13$, de unde obținem $a = -5$ sau $a = 5$, care convin	2p 3p
6.	Unghiul A are măsura egală cu 30° , deci $\sin A = \frac{1}{2}$ $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{14 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 49$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 =$ $= 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 2x-2 & x-4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $3(A(x) - I_2) = \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 2x-2 & x-4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
c)	$x A(x) - A(x^2) = \begin{pmatrix} x^2 & x^2 - 2x \\ x & 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 & x^2 - 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x + 2 \\ x - 1 & 2x - 2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\det(x A(x) - A(x^2)) = 0 - (-2x + 2)(x - 1) = 2(x - 1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	2p 3p
2.a)	$1 * 5 = 3 \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1+5}{3} + 1 =$ $= 15 - 2 + 1 = 14$	3p 2p

b)	$3 * x = 9x - \frac{3+x}{3} + 1 = \frac{26x}{3}$, pentru orice număr real x	3p
	$\frac{26x}{3} = -52$, de unde obținem $x = -6$	2p
c)	$0 * (3n) = -n + 1 \Rightarrow n * (0 * (3n)) = n * (-n + 1) = \frac{-9n^2 + 9n + 2}{3}$, pentru orice număr natural n	2p
	$\frac{-9n^2 + 9n + 2}{3} \geq \frac{2n}{3} \Leftrightarrow -9n^2 + 7n + 2 \geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -6x^2 - 12x + 18 =$	3p
	$= -6(x^2 + 2x - 3) = -6(x-1)(x+3)$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$	2p
	$x \in (-\infty, -3] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -3]$, $x \in [-3, 1] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3, 1]$, $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p
c)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2, f(-2))$ este $f'(-2) = -6 \cdot (-3) \cdot 1 = 18$	2p
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $B(0, f(0))$ este $f'(0) = -6 \cdot (-1) \cdot 3 = 18$, deci tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \int_1^3 (x-2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{9}{2} - 6 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = 0$	2p
b)	$\int_1^e (f(x) - x + 2) dx = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big _1^e =$	3p
	$= 0 - (-1) = 1$	2p
c)	F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$	2p
	$F''(x) = f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este convexă	3p