

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2 - \lg 40) \cdot \frac{1}{\lg^2 5 - \lg^2 2} = 1$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x - m^2 + 1 = 0$ este număr real strict mai mic decât 0.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x} = 4^{2x}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)! - n! \leq n+2$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{AO} = 2\overline{BC}$.
- 5p** 6. Determinați numerele reale a , $a > -2$, știind că $a^2 + 1$ și $a + 2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) > 0$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că matricea $B(n) = A(1^2) + A(2^2) + A(3^2) + \dots + A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{3}(xy + 4) - 3(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Calculați $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - \arctg x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{5x}{x^2 + x + 4}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx = 16$.

5p b) Calculați $\int_1^3 f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\lg 100 - \lg 40) \cdot \frac{1}{(\lg 5 - \lg 2)(\lg 5 + \lg 2)} =$ $= \lg \frac{100}{40} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2} \cdot \lg 10} = \lg \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2}} = 1$	2p 3p
2.	$2x = m^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{m^2 - 1}{2}$ <p>Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât 0 $\Leftrightarrow m^2 - 1 < 0$, deci $m \in (-1, 1)$</p>	2p 3p
3.	$2^{x^2+x} = 2^{4x} \Leftrightarrow x^2 + x = 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ <p>$x = 0$ sau $x = 3$</p>	3p 2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile</p> <p>Numerele n din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea $(n+1)! - n! \leq n+2$ sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{AO} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$ și $\vec{BC} = x_C\vec{i} + (y_C - 2)\vec{j}$, deci $6\vec{i} - 6\vec{j} = 2x_C\vec{i} + 2(y_C - 2)\vec{j}$ <p>Coordonatele punctului C sunt $x_C = 3$, $y_C = -1$</p>	3p 2p
6.	<p>Triunghiul este dreptunghic, deci $a^2 + 1 = 2(a+2)$, de unde obținem $a^2 - 2a - 3 = 0$</p> <p>$a = -1$ sau $a = 3$, care convin</p>	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(1) - A(a+1) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a} \\ 2 & 1 & 2 \\ a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a+1} \\ 1 & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$ <p>pentru orice $a \in (0, +\infty)$</p> $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = \sqrt{a+1} - 1 > 0, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	3p 2p

c)	$B(n) = \begin{pmatrix} 1+1+\dots+1 & 0 & 1+2+\dots+n \\ 1+1+\dots+1 & 0 & 1+1+\dots+1 \\ 1^2+2^2+\dots+n^2 & 1+1+\dots+1 & 1+1+\dots+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}, \text{ pentru}$ <p>orice număr natural n</p> <p>Pentru orice număr natural $n, n \geq 2$, $\det(B(n)) = \frac{n^3(n-1)}{2} \neq 0$, deci matricea $B(n)$ este inversabilă, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}(\sqrt{3} \cdot 2 + 4) - 3(\sqrt{3} + 2) =$ $= 6 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	$x \circ y = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3}x(y - \sqrt{3}) - 3(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$x \circ \sqrt{3} = \sqrt{3}, \sqrt{3} \circ y = \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = (3^1 \circ \sqrt{3}) \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = \sqrt{3} \circ \left(3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} \right) = \sqrt{3}$	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	<p>Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \arctg x) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x^2 + x + 4} = 0$ și $f(0) = 0$, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, deci f este continuă în $x = 0$</p> <p>Cum f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$f(x) = x - \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 0)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și continuă în $x = 0$, deci $f(x) \leq f(0)$ și, cum $f(0) = 0$, obținem $f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0)$</p> <p>Pentru orice $x \in [0, +\infty)$, $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{x^2 + x + 4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$, deci $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$\int_1^5 x(x+2)f(x) dx = \int_1^5 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^5 =$ $= \frac{25}{2} + 5 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 16$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) \Big _1^3 =$ $= \frac{1}{2} (\ln 15 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5$	<p>3p</p> <p>2p</p>

e)	$F'(x) = f(x), x \in (0, +\infty) \Rightarrow F''(x) = \frac{x^2 + 2x - (x+1)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}, x \in (0, +\infty)$ $F''(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este concavă}$	3p 2p
-----------	---	------------------------