Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z-2\overline{z}=-2+6i$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1)=\log_5(3x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de $30°$. Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m & 1 & 0\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(m)+A(-m)\right)=8$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x*(-x)\right)*\left((-x)*x\right)=24x$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^{e} x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib-2(a-ib)=-2+6i \Leftrightarrow -a+3ib=-2+6i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=2$ și $b=2$, deci $z=2+2i$	**2p**
2.	$f^2(1)=f(0)\cdot f(2) \Leftrightarrow (1+m)^2=m(4+m) \Leftrightarrow m^2+2m+1=4m+m^2$	**3p**
	$2m=1$, deci $m=\frac{1}{2}$, care convine	**2p**
3.	$(x-1)^2=3x+1 \Rightarrow x^2-5x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$ are 21 de elemente, deci sunt 21 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{21}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$	**2p**
	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului	**2p**
	Cum $\sin A=\frac{1}{2}$, obținem $2BC=2R$, deci $BC=R$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det\left(A(m)+A(-m)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=8-0=8$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$A(m)\cdot A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	**3p**
	$A(m)\cdot A(m)=A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow m=0$	**2p**

c)	$A(2k-1)-A(2k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul k	2p
	$A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n	3p
2.a)	$\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=$	3p
	$=\frac{1}{4}+3+\frac{9}{4}=\frac{11}{2}$	2p
b)	$x*(-x)=(-x)*x=-2x^2$, pentru orice număr real x	2p
	$\left(-2x^2\right)*\left(-2x^2\right)=24x \Leftrightarrow 24x^4=24x$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	3p
c)	$x*\frac{1}{x}=x^2+4\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+4+\frac{1}{x^2}$, pentru orice număr real nenul x	2p
	$\left(x*\frac{1}{x}\right)-6=x^2+4+\frac{1}{x^2}-6=x^2-2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$, deci $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=$	3p
	$=\dfrac{x^2+2-x^2-2x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2(1-x)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+2)^2}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4x+2}{x^2+2}\right)^x=$	3p
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+2}{4x+2}}\right)^{\frac{x(4x+2)}{x^2+2}}=e^4$	2p
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1)=\sqrt{3}$, obținem că $f(x)\leq\sqrt{3}$, pentru orice număr real x	3p
	$f\left(e^x\right)\leq\sqrt{3}\Rightarrow\frac{e^x+2}{\sqrt{e^{2x}+2}}\leq\sqrt{3}\Rightarrow\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x	2p
2.a)	$\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\|_1^{\sqrt{2}}=$	3p
	$=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	2p

b)	$\int_1^e x\left(x^3-f(x)\right)dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3-\ln\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{4}\ln^2 x\right)\Big\vert_1^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(e^2\right)=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4=\frac{2e^3-5}{3}$	**2p**