Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, știind că punctul $A(m,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{14-x}=\sqrt{3x+6}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $n(n-10)(n-11)\le 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(-1,4)$ și $C(3,7)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6**. Arătați că $\sin 30°\cos 30°+2\sin 45°\cos 45°-\sin 60°\cos 60°=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-3&1\\1&3-x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-5$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=10\cdot I_2$.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2x+y-3xy$.

5p **a)** Arătați că $1*2=-2$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(x-1)=-1$.

5p **c)** Dați exemplu de două numere iraționale a și b pentru care $a*b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x^4+5x^3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-27\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[0,3]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x\in(-\infty,0)\\ e^x+1, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculați $\int_{-1}^1 x f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=\left(3-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{14}=$	**3p**
	$=\frac{14}{5}\cdot\frac{5}{14}=1$	**2p**
2.	$f(m)=6\Leftrightarrow m^2+2=6\Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$14-x=3x+6\Rightarrow 4x=8$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 2 numere care verifică inegalitatea dată, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$	**1p**
5.	$AB=5$, $AC=6$, $BC=5$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=5+6+5=16$	**2p**
6.	$\sin 30°=\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\sin 30°\cos 30°+2\sin 45°\cos 45°-\sin 60°\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-2)\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-4-1=-5$	**2p**
b)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & 3-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-3 & 1\\ 1 & 3+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & 0\\ 0 & 1+(3-x)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\Leftrightarrow (x-3)^2-9=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=6$	**2p**
2.a)	$1*2=2\cdot 1+2-3\cdot 1\cdot 2=$	**3p**
	$=2+2-6=-2$	**2p**

b)	$x*(x-1)=2x+(x-1)-3x(x-1)=-3x^2+6x-1$, unde x este număr real	**3p**
	$-3x^2+6x-1=-1 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0$, deci $x=0$ sau $x=2$	**2p**
c)	De exemplu, $a=\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $b=-2\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**2p**
	$a*b=2\cdot\sqrt{2}+\left(-2\sqrt{2}\right)-3\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+12=12\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=$	**2p**
	$=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$	**2p**
	$f(0)=0$, $f(1)=1$ și $f(3)=-27$, deci $-27\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,3]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x+1\right)dx=\left.\left(e^x+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=(e+1)-(1+0)=e$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x^2+x+2\right)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x+1\right)=2$ și $f(0)=2$, obținem că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 x f(x)dx=\int_{-1}^0 x\left(x^2+x+2\right)dx+\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+x^2+2x\right)dx+\int_0^1\left(xe^x+x\right)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_{-1}^0+\left.\left(xe^x-e^x+\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)+\left(e-e+\frac{1}{2}\right)-(-1)=\frac{7}{12}$	**3p**