

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Test 5

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = 3$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ . Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $f(x) = x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{6-x} = \sqrt{x+14}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților.
- 5p 5. Determinați numărul real  $a$ , pentru care  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ , unde  $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$  și  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ .
- 5p 6. Arătați că  $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ , știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + y + az = 4, \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$$
 unde  $a$  este număr real și  $A(a)$  matricea coeficienților sistemului.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = 1$ .
- 5p b) Pentru  $a = -1$ , determinați soluția sistemului de ecuații.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr rațional  $p$ , matricea  $A(p)$  este inversabilă pentru orice număr rațional  $p$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x * y = xy - 101x - 101y + 10302$ .
- 5p a) Arătați că  $x * y = (x - 101)(y - 101) + 101$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „\*”.
- 5p c) Determinați numerele întregi  $x$  și  $y$ , cu  $x < y$ , pentru care  $x * y = 202$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 5$ .
- 5p a) Determinați panta tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p c) Demonstrați că  $e^x(1-x) \leq 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^3 \left( f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = 4$ .
- 5p b) Calculați  $\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx$ .
- 5p c) Determinați numărul real nenul  $a$ , știind că  $\int_1^e \left( f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{a}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 5

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = (2 - 1)(2 + 1) =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	3p 2p
2.	$x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$4(6 - x) = x + 14 \Rightarrow 24 - 4x = x + 14 \Leftrightarrow 5x = 10$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	1p 2p 2p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (a + 2)\vec{i} + (a + 2)\vec{j}$ $a = -2$	3p 2p
6.	Cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$ și $\det(A(-1)) = -1 \neq 0$ , deci sistemul de ecuații admite soluție unică $x = -5$ , $y = -6$ , $z = -20$	2p 3p
c)	$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 2 & 1 & p \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(p)) = -3p^2 - p + 1$ , unde $p$ este număr rațional $-3p^2 - p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$ sau $p = -\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$ , deci, pentru orice număr rațional $p$ , $\det(A(p)) \neq 0$ , adică matricea $A(p)$ este inversabilă	2p 3p
2.a)	$x * y = xy - 101x - 101y + 10201 + 101 = x(y - 101) - 101(y - 101) + 101 =$ $= (x - 101)(y - 101) + 101$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

<b>b)</b>	Elementul neutru al legii „*” este $e = 102$ $x = x' \Leftrightarrow x * x = 102 \Leftrightarrow (x - 101)^2 = 1$ , de unde obținem $x = 100$ sau $x = 102$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x * y = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) + 101 = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) = 101$ Cum $x$ și $y$ sunt numere întregi cu $x < y$ și $101$ este număr prim, obținem $x = 0$ și $y = 100$ sau $x = 102$ și $y = 202$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$ Panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 0$ , situat pe graficul funcției $f$ este egală cu $f'(0) = e^0 - 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f''(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) > 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci funcția $f$ este convexă pe $\mathbb{R}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -4$ , obținem $f(x) \geq -4$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) \geq -4$ , deci $e^{-x} \geq -x + 1$ , de unde $e^x(1 - x) \leq 1$ , pentru orice număr real $x$	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^3 \left( f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 \left( \frac{x^2 + 4}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx = \int_2^6 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \ln(x^2 + 4) \Big _2^6 =$ $= \ln 40 - \ln 8 = \ln 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^e \left( f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$ $\frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{a}$ , deci $a = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>