Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 3i$ și $z_2 = 5 - 6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) + f(m+1) = 35$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b, știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 4$. Știind că aria ΔABC este egală cu 6, calculați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + az = 3 \\ ax + 6y + 4z = a + 3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4) - A(1)) \cdot A(a) = A(a) \cdot (A(4) - A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

2. Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \dfrac{100(x+y)}{xy + 100}$.

5p **a)** Arătați că $3 * 0 = 3$.

5p **b)** Se consideră $f : M \to (0, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{10 - x}{10 + x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

5p **c)** Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de11 ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \left(x^2 - 4x + 1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = e^x (x-3)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1 - z_2 = 2(3-3i)-(5-6i)=$	**2p**
	$=6-6i-5+6i=1$	**3p**
2.	$m+15+(m+1)+15=35$	**2p**
	$2m+31=35 \Rightarrow m=2$	**3p**
3.	$3^x(2-3)+27=0 \Leftrightarrow 3^x=27$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre care sunt multipli de 25 sunt $25\cdot 4$, $25\cdot 5,\ldots,$ $25\cdot 39$, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{900}=\dfrac{1}{25}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$a=2$, $b=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 6=\dfrac{4\cdot AC}{2}\Rightarrow AC=3$	**3p**
	$BC=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&2&1\\2&a+1&a\\a&6&4\end{vmatrix}=8a+8+12+2a^2-a^2-a-12a-16=$	**3p**
	$=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(4)-A(1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&3\\3&0&0\end{pmatrix}$, $(A(4)-A(1))A(a)=3\begin{pmatrix}0&0&0\\a+2&a+7&a+4\\2&2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real	**3p**
	$A(a)(A(4)-A(1))=3\begin{pmatrix}1&2&2\\a&a+1&a+1\\4&6&6\end{pmatrix}$, deci $A(a)(A(4)-A(1))\neq(A(4)-A(1))A(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{Z}\setminus\{1,4\}$ și soluția sistemului de ecuații este $\left(\dfrac{a-3}{a-4},\dfrac{a-6}{a-4},-\dfrac{a-6}{a-4}\right)$	**3p**
	Cum x_0, y_0, z_0 și a sunt numere întregi, obținem $a=3$ sau $a=5$, care convin	**2p**

2.a)	$3*0=\frac{100(3+0)}{3\cdot 0+100}=$	**3p**
	$=\frac{300}{100}=3$	**2p**
b)	$f(x*y)=\dfrac{10-\frac{100(x+y)}{xy+100}}{10+\frac{100(x+y)}{xy+100}}=\frac{10xy-100x-100y+1000}{10xy+100x+100y+1000}=\frac{xy-10x-10y+100}{xy+10x+10y+100}=$	**3p**
	$=\frac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)}=\frac{10-x}{10+x}\cdot\frac{10-y}{10+y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 11 ori } x}\right)=f(0)$, deci $\underbrace{f(x)f(x)\ldots f(x)}_{\text{de 11 ori } f(x)}=f(0)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{11}=1$	**3p**
	$f(x)=1\Leftrightarrow 10-x=10+x$, deci $x=0$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x-3\right)=e^x(x-3)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0-3)(x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=-1$ sau $x_0=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,\ f(-1)=\frac{6}{e},\ f(3)=-2e^3$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-1)$, pe $(-1,3)$ și pe $(3,+\infty)$, graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte $\Leftrightarrow f(x)=a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,+\infty\right)=\left(0,\frac{6}{e}\right)$	**3p**
2.a)	$F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**3p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_e^a-\int_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-e-(a-e)=a\ln a-a$	**3p**
	$a\ln a-a=2a\Leftrightarrow a(\ln a-3)=0$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**2p**