**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***

**Testul 4**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\cdot 8,5+10,5:3,5=20$.

5p **2.** Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A(2,-2)$ aparține graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+a+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $10^{6-2x}=100^2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, numărul $\sqrt{10n}$ să fie rațional.

5p **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,a)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că dreptele $OA$ și $AB$ sunt perpendiculare.

5p **6**. Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB=12$, $BC=8$ și unghiul $C$ de măsură egală cu $30°$. Calculați $\sin A$.

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det B=-4$.

5p **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $A\cdot A-B\cdot B=a(A+B)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real $x$, matricea $C(x)=xA+2B$ este inversabilă.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real $x$ pentru care $(4x)*\frac{1}{4}=25$.

5p **c)** Calculați $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}$.

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{4}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $f$.

5p **c)** Demonstrați că $x^2+f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1)(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1}dx=20$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$.

5p **c)** Determinați numărul real $a$, $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx=18$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 4**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $2\cdot 8,5+10,5:3,5=17+105:35=$ | **2p** |
| | $=17+3=20$ | **3p** |
| **2.** | $f(2)=-2\Rightarrow -6+a+1=-2$ | **3p** |
| | $a=3$ | **2p** |
| **3.** | $10^{6-2x}=10^4\Leftrightarrow 6-2x=4$ | **3p** |
| | $x=1$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ are $9$ elemente, deci sunt $9$ cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele $n\in M$ pentru care numărul $\sqrt{10n}$ este rațional sunt $10$, $40$ și $90$, deci sunt $3$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ | **1p** |
| **5.** | $m_{OA}=-2$, $m_{AB}=\dfrac{a-2}{4}$ | **2p** |
| | $m_{OA}\cdot m_{AB}=-1\Leftrightarrow -2\cdot\dfrac{a-2}{4}=-1$, de unde obținem $a=4$ | **3p** |
| **6.** | $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\dfrac{12}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{\sin A}$ | **3p** |
| | $\sin A=\dfrac{8\cdot\frac{1}{2}}{12}=\dfrac{1}{3}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det B=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 6=$ | **3p** |
| | $=2-6=-4$ | **2p** |
| **b)** | $A\cdot A=\begin{pmatrix}16 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 18\\ 3 & 10\end{pmatrix}$, $A\cdot A-B\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=-3\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-3(A+B)$, deci $a=-3$ | **2p** |
| **c)** | $C(x)=\begin{pmatrix}-4x+2 & -5x+12\\ 2 & x+4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(C(x))=-4x^2-4x-16$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $\det(C(x))=-(2x+1)^2-15<0$, deci $\det(C(x))\neq 0$ adică matricea $C(x)$ este inversabilă pentru orice număr real $x$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $2*\frac{1}{2}=(2\cdot 2-1)\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}=$ | **3p** |
| | $=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **b)** | $(4x)*\frac{1}{4}=\frac{2-8x}{2}$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $\frac{2-8x}{2}=25$, de unde obținem $x=-6$ | **2p** |
| **c)** | $x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}*y=\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| | $\left(1*\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}=\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=1+\frac{-4}{(x+3)^2}=$ | **3p** |
| | $=\frac{(x+3)^2-4}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x(x+3)}\right)=1$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcției $f$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-3,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-3,-1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[-1,+\infty)$ | **3p** |
| | $f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$ și, cum $x^2\ge 0$, obținem $x^2+f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^5\frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}dx=\int_1^5(2x-1)dx=\left(x^2-x\right)\Big\vert_1^5=$ | **3p** |
| | $=20-0=20$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^2\frac{2x^2+x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(2x+\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$ | **3p** |
| | $=\frac{3}{2}+\ln 2$ | **2p** |
| **c)** | $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\frac{2f(x)\sqrt{f(x)}}{3}\Big\vert_a^2=18-\frac{2f(a)\sqrt{f(a)}}{3}$ | **3p** |
| | $f(a)=0$ și, cum $a$ este număr real cu $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, obținem $a=\frac{1}{2}$ | **2p** |