Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = -5$ și rația $r = 8$.

5p **2.** Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2 - x - a - 1 = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = 2x$.

5p **4.** Calculați $5A_3^2 - 3C_5^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{b} = 5\vec{i} - \left(m^2 + 1\right)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB > BC$, $AC = 6$, $BC = 10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a,b) = aI_2 + bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b) \cdot M(x,y) = M(ax, ay + bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B = M(x,2y) + M(y,2x)$ și $C = M\left(x\sqrt{2},1\right) \cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2 + y^2 = 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + 2$ și $x \circ y = x + y + 2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2) \circ (1*3) = 1*(2 \circ 3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x * e = e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n) \geq n \circ (-n)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x\ln(x+1), & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a < 0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ și $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1 + x\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\frac{(2a_1+6r)\cdot 7}{2}=\frac{(2\cdot(-5)+6\cdot 8)\cdot 7}{2}=$	**3p**
	$=133$	**2p**
2.	$\Delta=1-4a(-a-1)=(2a+1)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Rightarrow a\neq-\frac{1}{2}$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=3$	**2p**
4.	$5A_3^2-3C_5^3=5\cdot\frac{3!}{(3-2)!}-3\cdot\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=$	**2p**
	$=5\cdot 6-3\cdot\frac{4\cdot 5}{2}=30-30=0$	**3p**
5.	$\frac{2}{5}=\frac{m}{-m^2-1}\Leftrightarrow 2m^2+5m+2=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin C}{2}\Rightarrow 15=\frac{6\cdot 10\cdot\sin C}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $AB>BC>AC$, unghiul C are măsura cea mai mare dintre unghiurile ΔABC, deci unghiul C are măsura de $150°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=-1+1=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
	$M(a,b)\cdot M(x,y)=(aI_2+bA)(xI_2+yA)=axI_2+ayA+bxA+ybA\cdot A=axI_2+(ay+bx)A=$ $=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$B=xI_2+2yA+yI_2+2xA=M(x+y,2(x+y))$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Cum $C=M\left(2xy,\sqrt{2}(x+y)\right)$, obținem că $x+y=2xy=0$, deci $x=y=0\Rightarrow x^2+y^2=0$	**3p**
2.a)	$(1*2)\circ(1*3)=(2+2+4+2)\circ(3+2+6+2)=10\circ 13=10+13+2=25$	**3p**
	$1*(2\circ 3)=1*(2+3+2)=1*7=7+2+14+2=25$, deci $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$	**2p**

b)	$x\circ(-2)=(-2)\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$	**2p**
	$x*e=x*(-2)=-2x+2x+(-4)+2=-2=e$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$n*(-n)=2-n^2$, $n\circ(-n)=2$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2-n^2\geq 2\Leftrightarrow n^2\leq 0$, deci $n=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x-1+\sqrt{x^2-x+1}\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x\ln(x+1)\right)=0$ și $f(0)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, de unde obținem că f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ și $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$	**2p**
c)	Dacă $a\in(-\infty,0)$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este $f'(a)=1+\dfrac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$	**2p**
	Cum $f'(a)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1}=1-2a\Leftrightarrow 4a^2-4a+4=4a^2-4a+1$, ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox	**3p**
2.a)	$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	**2p**
b)	$\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx=f(x)\Big\vert_{\frac{1}{4}}^{4}=f(4)-f\left(\frac{1}{4}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{15}{4}+3=\dfrac{27}{4}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_m^1 f^2(x)\cdot g(x)dx=\int_m^1 f^2(x)\cdot f'(x)dx=\frac{1}{3}f^3(x)\Big\vert_m^1=\frac{1}{3}\left(f^3(1)-f^3(m)\right)$	**3p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(m)=0$, deci $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, care convine	**2p**