

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2 = 1 - i$. Arătați că $z^4 + 2i = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2) + \log_5(2x-1) = 2$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0,1)$ pentru care $4\cos x \cos(\pi - x) + 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 6$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot B + B = B \cdot A$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y , știind că $(x+1)A \cdot B + (y-2)B \cdot A = B \cdot B \cdot B$.
2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 4 = 4 * 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** este comutativă.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2 * 2) * n < 64$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 e^x |f(x)| dx$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

**Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$**

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^4 = (z^2)^2 = (1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$ $z^4 + 2i = -2i + 2i = 0$	3p 2p
2.	$\Delta = 4 - 4m$ și valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4 \cdot 1} = -\frac{4-4m}{4} = m-1$ $m-1 > 1$, deci $m \in (2, +\infty)$	3p 2p
3.	$\log_5(x+2)(2x-1) = 2 \Rightarrow (x+2)(2x-1) = 25 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0$ $x = -\frac{9}{2}$, care nu convine; $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Numerele naturale care au suma cifrelor divizibilă cu 9 sunt multiplii de 9, deci mulțimea cazurilor favorabile este $\{9 \cdot 12, 9 \cdot 13, 9 \cdot 14, \dots, 9 \cdot 111\}$ și are 100 de elemente $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AB} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overline{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\overline{AD} = (x_D - 2)\vec{i} + (y_D - 1)\vec{j}$ $\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{j} + (x_D - 2)\vec{i} + (y_D - 1)\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow x_D = -1$ și $y_D = -4$	3p 2p
6.	Cum $\cos(\pi - x) = -\cos x$, obținem $-4\cos^2 x + 3 = 0$, deci $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ Pentru $x \in (0, 1)$, $\cos x > 0$, deci $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x = \frac{\pi}{6}$, care convine	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$	2p 3p
b)	$A \cdot B + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$	3p 2p

c)	Cum $B \cdot B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $x+1+2(y-2)=0$ și $2(x+1)+3(y-2)=0$ $x=-1, y=2$	3p 2p
2.a)	$2*4=2^4=16$ $4*2=4^2=16$, deci $2*4=4*2$	2p 3p
b)	$2*1=2^1=2$ și $1*2=1^2=1$ Deoarece $2*1 \neq 1*2$, legea de compoziție „*” nu este comutativă	2p 3p
c)	$(2*2)*n < 64 \Leftrightarrow 4*n < 64 \Leftrightarrow 4^n < 4^3$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$ $= \frac{2(x^2+x+1)+2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(x+1) - f(x) = 2(x+1) + \ln(x^2+3x+3) - 2x - \ln(x^2+x+1) = 2 + \ln \frac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \ln \frac{x^2+3x+3}{x^2+x+1} \right) = 2 + \ln 1 = 2$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este injectivă $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} \right)$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0$, deci $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și, cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă pe \mathbb{R} , obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2x-1) dx = (x^2-x) \Big _0^1 =$ $= 1-1=0$	3p 2p
b)	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x 2x-1 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^x (1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^x (2x-1) dx = e^x (3-2x) \Big _0^{\frac{1}{2}} + e^x (2x-3) \Big _{\frac{1}{2}}^1 =$ $= 2\sqrt{e} - 3 - e + 2\sqrt{e} = 4\sqrt{e} - e - 3$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 (2x-1)^n dx = \frac{(2x-1)^{n+1}}{2(n+1)} \Big _0^1 = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$, unde n este număr natural nenul Cum $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p 2p