

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2$.
- 5p 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + m = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 = 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1} = 3x+1$.
- 5p 4. După o ieftinire cu 25%, prețul unui obiect este 750 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ și $B(8,6)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $OABC$ este paralelogram.
- 5p 6. Arătați că $\sqrt{3}\cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cos 90^\circ = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = 2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X \cdot M(1) = M(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4xy + 4x + 4y + 3$.
- 5p a) Arătați că $1 * (-1) = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $x * y = 4(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $x * \frac{1}{4} * (-x) = 19$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 1)(f(x) - x^2) dx = 1$.
- 5p b) Calculați $\int_{-1}^1 x f(x) dx$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = \frac{12}{6} = 2$ $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2^2 - 2 = 2$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2m$ $16 - 2m = 2 \Leftrightarrow m = 7$	3p 2p
3.	$3x + 1 = (3x + 1)^2 \Rightarrow 3x(3x + 1) = 0$ $x = -\frac{1}{3}$ sau $x = 0$, care convin	2p 3p
4.	$x - \frac{25}{100} \cdot x = 750$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire $x = 1000$ de lei	3p 2p
5.	$OABC$ este paralelogram, deci segmentele OB și AC au același mijloc Punctul $M(4,3)$ este mijlocul segmentului OB , deci $x_C = 8$ și $y_C = 4$	2p 3p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 90^\circ = 0$ $\sqrt{3} \cos 30^\circ + \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cos 90^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 2 = -1$	3p 2p
b)	$M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) - (I_2 + (a+b)A) = abA \cdot A$, pentru orice numere reale a și b Cum $A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ și $M(0) = I_2$, obținem $M(a) \cdot M(b) - M(a+b) = 2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$\det M(1) \neq 0, (M(1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $X = M(0) \cdot (M(1))^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$1 * (-1) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 3 =$ $= -4 + 4 - 4 + 3 = -1$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M_tehnologic*

Test 4

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x * y = 4xy + 4x + 4y + 4 - 1 =$ $= 4x(y + 1) + 4(y + 1) - 1 = 4(x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$x * \frac{1}{4} = 5x + 4$, $(5x + 4) * (-x) = 20(1 - x^2) - 1$, pentru orice număr real x $20(1 - x^2) = 20$, de unde obținem $x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - (x^2 + 4x + 4)}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x+1)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3$, deci dreapta de ecuație $y = x + 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $x \in (-1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția f este convexă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1)(f(x) - x^2) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 dx =$ $= x \Big _0^1 = 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$\int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right) \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = 0$	3p 2p
c)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \arctg x \right) \Big _0^1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$ $\frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n^2 = 4$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 2$	3p 2p