

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 20$. Determinați numerele reale a , știind că $f(a) = a$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x = \frac{1}{5^{3x}}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(1, 0)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x)M(y) = M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x = y$.
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care $M(m^2 + 1)M(n^2) = M(n^2)M(m^2 + 1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = 5$.
- 5p c) Dați exemplu de numere distincte $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x$.
- 5p c) Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^e f'(x) dx = 1$.
- 5p b) Calculați $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx$.
- 5p c) Determinați numărul real p , $p > 1$, știind că $\int_1^p x f(x) dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_6^2 = b_5 b_7 \Rightarrow 36 = 3b_7$ $b_7 = 12$	3p 2p
2.	$a^2 - 20 = a \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$ $a = -4$ sau $a = 5$	3p 2p
3.	$5^x = 5^{-3x} \Leftrightarrow x = -3x \Leftrightarrow 4x = 0$ $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5 \cdot 3 = 15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	2p 3p
5.	$AO = BO = CO$ și $O \in AC$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în B Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x = 0$, $y = 1$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = AA + yAB + xBA + xyBB$, $M(y)M(x) = AA + xAB + yBA + yxBB$ Cum $AB = A$ și $BA = B$, obținem $yA + xB = xA + yB \Leftrightarrow (x - y)A = (x - y)B \Leftrightarrow x = y$	2p 3p
c)	$m^2 + 1 = n^2 \Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 1$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m, n) = (0, -1)$ sau $(m, n) = (0, 1)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = 7xy + x + y + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} =$ $= 7x\left(y + \frac{1}{7}\right) + \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7} = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$ sau $x + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ $x = -1$ sau $x = \frac{5}{7}$	3p 2p

c)	De exemplu, $a = \frac{1}{7}$ și $b = \frac{3}{7}$	2p
	$a \circ b = 7 \left(a + \frac{1}{7} \right) \left(b + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = 1 \in \mathbb{N}$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x - 2(x-1)}{x^2} =$ $= \frac{x - 2x + 2x - 2}{x^2} = \frac{x - 2}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p
		2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x \Leftrightarrow f'(a) = -1$ $\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$, care nu convine sau $a = 1$, care convine	3p
		2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$ și, cum $f(1) = 0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	2p
		3p
2.a)	$\int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big _1^e = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	3p
		2p
b)	$\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{\ln^3 x}{3} \Big _1^e =$ $= \frac{1}{3}$	3p
		2p
c)	$\int_1^p x f(x) dx = \int_1^p x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^p - \int_1^p \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4}$ și, cum $p > 1$, obținem $p = 2$	3p
		2p