

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că suma pătratelor elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n-1 < 2\}$ este egală cu 5.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că vârfului parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD , unde punctul D este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Calculați $S = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2020\pi$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -4$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = 0$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right) = nI_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y})^5$.
- 5p a) Arătați că $2^5 * 3^5 = 5^5$.
- 5p b) Determinați numărul real x , știind că $2^5 * x^5 * (243x^5) = 100000$.
- 5p c) Se consideră numerele $M = 1^5 * 2^5 * \dots * 10^5$ și $N = 5^5 \cdot 11^5$. Demonstrați că $M - N = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că graficul funcției f nu intersectează axa Ox .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{4}{3}$.

- | | |
|----|--|
| 5p | b) Calculați $\int_{-1}^1 x f(x) dx$. |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n < 3 \Rightarrow M = \{0, 1, 2\}$ Suma pătratelor elementelor mulțimii M este $0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$	3p 2p
2.	Abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este $-\frac{b}{2a} = \frac{m}{2}$ $\frac{m}{2} = 3$, deci $m = 6$	2p 3p
3.	$x + 2 = 8 - x \Rightarrow 2x = 6$ $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu 12 elemente are C_{12}^{10} submulțimi cu 10 elemente $C_{12}^{10} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$	3p 2p
5.	$D(2, 2)$, deci $M(5, 6)$, unde M este mijlocul segmentului CD $m_{AC} = 3$, deci ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin punctul M este $y - 6 = 3(x - 5)$, deci $y = 3x - 9$	2p 3p
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k + 1)\pi = -1$, unde $k \in \mathbb{Z}$ $S = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1 = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + (-1) + (-1) - 0 - 1 - 1 = -4$	2p 3p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+2xy & 0 & 1-2xy \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-2xy & 0 & 1+2xy \end{pmatrix}$, $A(2xy) = \begin{pmatrix} 2xy & 1 & -2xy \\ 1 & 0 & 1 \\ -2xy & 1 & 2xy \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$, pentru orice număr real nenul x $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right) = 1010 \cdot 2I_3$, deci $n = 2020$	2p 3p

2.a)	$2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} \right)^5 =$	3p
	$= (2 + 3)^5 = 5^5$	2p
b)	$2^5 * x^5 * (243x^5) = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{x^5} + \sqrt[5]{243x^5} \right)^5 = (2 + x + 3x)^5 = (2 + 4x)^5$, unde x este număr real	3p
	$(2 + 4x)^5 = 10^5$, deci $x = 2$	2p
c)	$1^5 * 2^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} \right)^5 = (1 + 2)^5$, $1^5 * 2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} \right)^5 = (1 + 2 + 3)^5$	2p
	$M = 1^5 * 2^5 * 3^5 * \dots * 10^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} + \dots + \sqrt[5]{10^5} \right)^5 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^5 = 5^5 \cdot 11^5 = N$, de unde obținem $M - N = 0$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} =$	2p
	$= \frac{2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}, x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} + \ln \frac{x+1}{x} \right) = 1 + \ln 1 = 1$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p
	$f(1) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, de unde obținem că graficul funcției f nu intersectează axa Ox	2p
2.a)	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$	2p
b)	$\int_{-1}^1 xf(x) dx = - \int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1} dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx =$	2p
	$= -\frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big _{-1}^0 + \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$	3p
c)	$\int_0^x t \cdot f(t) dt$	3p
	Din regula lui l'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \frac{1}{2}$	2p