

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{12}(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) + \sqrt{8}(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $f(a) = 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9-x} = x - 3$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,1)$ și $B(-2,3)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M , unde M este mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 12$ și ipotenuza $BC = 20$. Calculați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care $\det(aA + B(a)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + xy + y^2$.
- 5p** a) Arătați că $2 * (-1) = 3$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $n * n = 48$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 5 \ln x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{x f'(x)} = \frac{1}{2}$.
- 5p** c) Demonstrați că $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^2 (x+2)f(x) dx = 6$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2} \right) dx$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^6 (x^2 - 9)f(x+1) dx = n^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{12}(\sqrt{3}-3\sqrt{2})+\sqrt{8}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{36}-3\sqrt{24}+3\sqrt{24}-\sqrt{16}==6-4=2$	3p 2p
2.	$f(a)=a^2-2a+a$, deci $a^2-a-2=0$ $a=-1$ sau $a=2$	3p 2p
3.	$9-x=x^2-6x+9$ $x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile Numerele naturale pare de două cifre, care sunt multipli de 5, sunt 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$M(-4,2)$ $OM=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	3p 2p
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=16$ $A_{\Delta ABC}=\frac{AB \cdot AC}{2}=\frac{12 \cdot 16}{2}=96$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot (-3) =$ $= -4 + 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} -2x & -9 \\ -3x & -13 \end{pmatrix}$, $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+3 & -3x-12 \\ x+4 & -3x-16 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} -2x & -9 \\ -3x & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 & -3x-12 \\ x+4 & -3x-16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
c)	$aA + B(a) = \begin{pmatrix} 2a & -3a+3 \\ 2a & -4a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(aA + B(a)) = -2a^2 + 2a$, unde a este număr real $-2a^2 + 2a = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 1$	3p 2p
2.a)	$2 * (-1) = 2^2 + 2 \cdot (-1) + (-1)^2 =$ $= 4 - 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = x^2 + xy + y^2 = y^2 + yx + x^2 =$ $= y * x$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compoziție „*” este comutativă	3p 2p

c)	$n^2 + n^2 + n^2 = 48 \Leftrightarrow n^2 = 16$ $n = -4$, care nu convine; $n = 4$, care convine	3p 2p
-----------	---	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 6x - 1 - \frac{5}{x} =$ $= \frac{6x^2 - x - 5}{x} = \frac{(x-1)(6x+5)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{x f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(6x+5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(6 + \frac{5}{x}\right)} =$ $= \frac{3}{1 \cdot 6} = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$, $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, de unde obținem $3x^2 - x - 2 \geq 5 \ln x$, deci $3x^2 - x - 2 \geq \ln(x^5)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_{-1}^2 (x+2)f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _{-1}^2 =$ $= \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = 6$	3p 2p
b)	$\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2} \right) dx = \int_0^4 \frac{1}{x+2} dx = \ln(x+2) \Big _0^4 =$ $= \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$	3p 2p
c)	$\int_0^6 (x-3)(x+3) \frac{x^2 + 2x + 2}{x+3} dx = \int_0^6 (x^3 - x^2 - 4x - 6) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x \right) \Big _0^6 = 144$ $n^2 = 144$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 12$	3p 2p