

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{10} - \sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{2021}}{x^2 + 1}$. Arătați că funcția f este impară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = 16$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(0, 3)$ și $C(-2, 2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 30° și măsura unghiului B de 45° . Arătați că $AC = BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x + y + mz = 9 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - 3y = -7 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(m)) = m - 10$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați inversa matricei $A(9)$.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real m , $m \neq 10$, dacă (a, b, c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a = b + c$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 7(x - 3)(y - 3) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $x * 3 = 3$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = -46$.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5^x}{7} + 3$. Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x + 2)}$.
- 5p** a) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + \frac{1}{x} - 4 \ln(x + 2)$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int_1^2 (x+2)f(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real m , $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x) dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{10} + \sqrt{6}) = \sqrt{10}^2 - \sqrt{6}^2 =$ $= 10 - 6 = 4 = 2^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \frac{(-x)^{2021}}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^{2021}}{x^2 + 1} =$ $= -\frac{x^{2021}}{x^2 + 1} = -f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este impară	3p 2p
3.	$2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x + 2) = 0$ Cum $2^x > 0$, pentru orice număr real, obținem $2^x = 8$, deci $x = 3$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ este $C_5^2 =$ $= \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 5$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d = 5$ Ecuația dreptei d este $y - 2 = 5(x + 2)$, deci $y = 5x + 12$	3p 2p
6.	$\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{2AC}{\sqrt{2}} = 2BC$, deci $AC = BC\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3m + 2 - (-4m) - 12 - 0 =$ $= -3m + 4m - 10 = m - 10$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$A(9) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A(9)) = -1$ $A^{-1}(9) = \begin{pmatrix} 3 & 27 & 19 \\ -2 & -18 & -13 \\ -1 & -10 & -7 \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	$m \neq 10 \Rightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ Cum $\log_2 a = \log_2 2 = 1$ și $b + c = 1 + 0 = 1$, obținem $\log_2 a = b + c$	3p 2p

2.a)	$x * 3 = 7(x-3)(3-3) + 3 =$ $= 0 + 3 = 3$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$x * x = 7(x-3)^2 + 3$, $x * x * x = 49(x-3)^3 + 3$, pentru orice număr real x $49(x-3)^3 + 3 = -46 \Leftrightarrow (x-3)^3 = -1$, deci $x = 2$	2p 3p
c)	$f(x) * f(y) = 7(f(x)-3)(f(y)-3) + 3 = 7\left(\frac{5^x}{7} + 3 - 3\right)\left(\frac{5^y}{7} + 3 - 3\right) + 3 =$ $= 7 \cdot \frac{5^x}{7} \cdot \frac{5^y}{7} + 3 = \frac{5^{x+y}}{7} + 3 = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}}{x^2 + 2x + 2} =$ $= \frac{x^2 + 2x + 2 - x(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = 1$ Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-2, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $f(-2) = -\sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ și, cum f este continuă, obținem $\text{Im } f = [-\sqrt{2}, 1)$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x+2} = \frac{2x^2(x+2) - (x+2) - 4x^2}{x^2(x+2)} =$ $= \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x+2)} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	2p 3p
b)	$\int_1^2 (x+2)f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x^3 - x - 2}{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \left(x^2 - \ln x + \frac{2}{x}\right) \Big _1^2 =$ $= 4 - \ln 2 + \frac{2}{2} - 1 + \ln 1 - 2 = 2 - \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_2^m f(x) dx = F(x) \Big _2^m = F(m) - F(2) = 2m + \frac{1}{m} - \frac{9}{2} + 4 \ln \frac{4}{m+2}$ $2m + \frac{1}{m} - \frac{9}{2} + 4 \ln \frac{4}{m+2} = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$, deci $\ln \frac{4}{m+2} = -1 \Rightarrow m = 4e - 2$, care convine	3p 2p