

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**Testul 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră numărul complex  $z = 1 + i$ . Arătați că  $z^2 - z - i = -1$ .
- 5p** 2. Determinați cel mai mic număr natural  $n$  pentru care ecuația  $x^2 - 3x + 3 - n = 0$  are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,2)$ ,  $B(4,2)$  și  $C(3,0)$ . Calculați aria triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin x - \sin(\pi - x) + \cos x + \cos(\pi - x) + \operatorname{tg} 2x$ , unde  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .  
Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A + I_3) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $A \cdot A \cdot A = O_3$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  pentru care  $A \cdot X = X \cdot A$ , atunci există numerele reale  $a, b$  și  $c$ , astfel încât  $X = aI_3 + bA + cA \cdot A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = |x - y|$ .
- 5p** a) Arătați că  $(5 * 2) * 1 = 2$ .
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Demonstrați că  $(a * b) + (b * c) \geq a * c$ , pentru orice numere reale  $a, b$  și  $c$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $x - 1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$ , pentru orice  $x \in [1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 f^2(x) dx = 4$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^1 \ln(f(x)) dx$ .

**5p** c) Demonstrați că există un singur număr real  $x$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , pentru care  $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021$ .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 3

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 - z - i = 1 + 2i + i^2 - 1 - i - i =$ $= 1 + 2i - 1 - 1 - 2i = -1$	3p 2p
2.	$\Delta = 9 - 4(3 - n) = 4n - 3$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow n > \frac{3}{4}$ , deci $n = 1$	2p 3p
3.	$2 + \log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 4 \Rightarrow (\log_5 x - 1)^2 = 0$ $\log_5 x = 1$ , deci $x = 5$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În această mulțime există 45 de numere divizibile cu 2, 30 de numere divizibile cu 3 și 15 numere divizibile atât cu 2 cât și cu 3, deci sunt $45 + 30 - 15 = 60$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$	2p 2p 1p
5.	Distanța de la punctul $C$ la dreapta $AB$ este egală cu 2 $AB = 5 \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$	2p 3p
6.	$\sin(\pi - x) = \sin x$ , $\cos(\pi - x) = -\cos x \Rightarrow E(x) = \text{tg } 2x$ , pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$	2p 3p

<p><b>c)</b></p>	<p>Pentru <math>X = \begin{pmatrix} a &amp; b &amp; c \\ d &amp; e &amp; f \\ g &amp; h &amp; i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})</math>, obținem <math>A \cdot X = \begin{pmatrix} d &amp; e &amp; f \\ g &amp; h &amp; i \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> și <math>X \cdot A = \begin{pmatrix} 0 &amp; a &amp; b \\ 0 &amp; d &amp; e \\ 0 &amp; g &amp; h \end{pmatrix}</math></p> <p><math>A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow d = h = 0, g = 0, a = e = i, b = f</math>, deci <math>X = \begin{pmatrix} a &amp; b &amp; c \\ 0 &amp; a &amp; b \\ 0 &amp; 0 &amp; a \end{pmatrix} = aI_3 + bA + cA \cdot A</math>,</p> <p>unde <math>a, b</math> și <math>c</math> sunt numere reale</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><b>2.a)</b></p>	<p><math>5 * 2 =  5 - 2  = 3</math> <math>(5 * 2) * 1 = 3 * 1 =  3 - 1  = 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><b>b)</b></p>	<p><math>x * y =  x - y  =  -(y - x)  =</math> <math>=  y - x  = y * x</math>, pentru orice numere reale <math>x</math> și <math>y</math>, deci legea de compoziție „<math>*</math>” este comutativă</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><b>c)</b></p>	<p><math>(a * b) + (b * c) =  a - b  +  b - c  \geq  (a - b) + (b - c)  =</math> <math>=  a - b + b - c  =  a - c  = a * c</math>, pentru orice numere reale <math>a, b</math> și <math>c</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<p><b>1.a)</b></p>	<p><math>f'(x) = \frac{(2x-2)e^x - (x^2-2x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x-2-x^2+2x-1)}{e^{2x}} =</math> <math>= \frac{-x^2+4x-3}{e^x} = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}, x \in \mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<p><b>b)</b></p>	<p><math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1</math> sau <math>x = 3</math> <math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>(-\infty, 1]</math>, <math>f'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in [1, 3] \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>[1, 3]</math> și <math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in [3, +\infty) \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>[3, +\infty)</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><b>c)</b></p>	<p><math>f</math> este crescătoare pe <math>[1, 3]</math>, <math>f</math> este descrescătoare pe <math>[3, +\infty)</math> și <math>f(3) = \frac{4}{e^3}</math>, deci <math>f(x) \leq \frac{4}{e^3}</math>, pentru orice <math>x \in [1, +\infty)</math> <math>\frac{(x-1)^2}{e^x} \leq 4e^{-3} \Rightarrow (x-1)^2 \leq 4e^{x-3}</math>, deci <math>x-1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}</math>, pentru orice <math>x \in [1, +\infty)</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><b>2.a)</b></p>	<p><math>\int_0^2 f^2(x) dx = \int_0^2 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^2 =</math> <math>= \frac{4}{2} + 2 = 4</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<p><b>b)</b></p>	<p><math>\int_0^1 \ln \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1)' \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} (x+1) \ln(x+1) \Big _0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 dx =</math> <math>= \ln 2 - \frac{1}{2} x \Big _0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

<b>c)</b>	$F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt$ derivabilă și $F'(x) = e^{f(x)} > 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$  $F$ este strict crescătoare și continuă, $F(0) = 0$ și $F(2021) = \int_0^{2021} e^{\sqrt{t+1}} dt \geq \int_0^{2021} 1 dt = 2021$ ,  deci există un singur $x \in [0, +\infty)$ , pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
-----------	--	----------------------------