Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=1$ şi $b_2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$. Determinaţi numerele naturale x, pentru care $f(x)<7$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8}=x+2$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(1,a)$ și $D(2,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.
5p	**6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=10$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & x\\ 2x & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+y-4)-xy$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
5p	**c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*2019*(-2020)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $0\leq\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_1^2\frac{1}{x^2}f(x)\,dx$.
5p	**c)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f are un singur punct de inflexiune.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**3p**
	$b_3 = 1\cdot 2^2 = 4$	**2p**
2.	$3x+1<7 \Leftrightarrow x<2$	**2p**
	Cum x este număr natural, obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
3.	$x^2+8=(x+2)^2$	**2p**
	$x=1$, care convine	**3p**
4.	$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} =$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$, $m_{CD}=1-a$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{AB}=m_{CD} \Leftrightarrow 1-a=1 \Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{10}{BC}$	**3p**
	$BC=20$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=2\cdot 3-2\cdot 1=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy\\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y+3xy) & x+y+3xy\\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy)\end{pmatrix}=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(a+a+3a\cdot a)=A(5) \Leftrightarrow 3a^2+2a-5=0$	**3p**
	$a=-\frac{5}{3}$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x \Leftrightarrow (x-5)(x-4)\leq 0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**
c)	$x*5=x$ și $5*y=y$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*2019*(-2020)=\left(\left(1*(-2)*3*(-4)\right)*5\right)*(-6)*\ldots*2019*(-2020)=$ $=5*\left((-6)*\ldots*2019*(-2020)\right)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2(x+2)e^{-x}+(x+2)^2e^{-x}\cdot(-1)=$	**3p**
	$=\left(-x^2-2x\right)e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x+2)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=4$, obținem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-2,+\infty)$	**3p**
	$x,y\in[-2,+\infty)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 4$ și $0\leq f(y)\leq 4\Rightarrow 0\leq f(x)f(y)\leq 16\Rightarrow 0\leq\sqrt{f(x)f(y)}\leq 4$, de unde obținem $0\leq\dfrac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\int_0^1x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{4}-0=\dfrac{1}{4}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2}f(x)\,dx=\int_1^2xe^x\,dx=\left.(x-1)e^x\right\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2$	**2p**
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, deci $F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=x^2(x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-3)$, $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-3,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	**3p**