Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z-z^2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m, știind că $f(x)>0$ pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(\sqrt{x}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{x}-1\right)=2$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=8$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.
	2. Se consideră funcţia $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{74}{3}$.

5p	**b)** Calculați $\int_{-3}^{3} \lvert x f(x) \rvert dx$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstraţi că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-4z+5=(2+i)^2-4(2+i)+5=4+4i+i^2-8-4i+5=$	**3p**
	$=i^2+1=-1+1=0$	**2p**
2.	$M(0,2)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=2$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x^3=x^3+2x \Leftrightarrow 2x=0$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ are $5!=120$ de elemente, deci sunt 120 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, care au cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3, sunt 6, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$	**1p**
5.	$CA=CB \Leftrightarrow \sqrt{(4-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(a-3)^2}$	**3p**
	$16+a^2-2a+1=4+a^2-6a+9 \Leftrightarrow a=-1$	**2p**
6.	$A+B+C=\pi$, $2B=A+C$	**3p**
	$3B=\pi \Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(xy)\\0&xy&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(yx)\\0&yx&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
c)	$A\left(\dfrac{1}{3}\right)A(3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A\left(\dfrac{1}{2}\right)A(2)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot A\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=A\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot A(3)\cdot A\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot A(2)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow n=5$	**3p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2-4(1+2)+10=$ $=2-12+10=0$	**3p** **2p**
b)	$x*5=x\cdot 5-4(x+5)+20=5x-4x-20+20=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$5*x=5x-4(5+x)+20=5x-20-4x+20=x$, pentru orice număr real x, deci $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*y=(x-4)(y-4)+a-16$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$x,y\in H\Rightarrow x-4\geq 0$ și $y-4\geq 0$ și, cum $a\geq 20$, obținem $x*y\geq 4\Rightarrow x*y\in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6^x\ln 6-3^x\ln 3+2^x\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0)=\ln 6-\ln 3+\ln 2=\ln 4$	**2p**
b)	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ și, cum $f(0)=1$, obținem $y=x\ln 4+1$	**3p**
	$\ln(16e)=a\ln 4+1\Rightarrow 1+\ln 16=\ln\left(4^a\right)+1$, deci $a=2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln 4}{1}=\ln 4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)dx=\int_1^2\left(x^2+3-2x-2\right)dx=\int_1^2\left(x^2-2x+1\right)dx=\dfrac{(x-1)^3}{3}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}\right)dx=\left(x-\ln\left(x^2+3\right)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\ln 4-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\ln 3=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$, $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}\leq 0\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(0)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{3}$	**2p**
	$0\leq I_n\leq\int_0^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^n dx$, deci $0\leq I_n\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**