

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = -1$ și $b_2 = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 7x + 9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) > 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1) = \log_3(6-x) - 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^{n-2} - A_n^1 = 5$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3, -1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y = (m-1)x - 2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.
- 5p** 6. Determinați $\cos(\pi - 2x)$, știind că x este număr real și $\cos x = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = -3$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a) = A(a) \cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy$.
- 5p** a) Arătați că $(-3) * 3 = 9$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $2^x * 4^{x-1} = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2xe^x - 2x + 1}{x}$.

5p a) Arătați că funcția $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x + 2e^x - 2x + 2021$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Arătați că $\int_1^e f(x) dx = 2e^e - 4e + 3$.

5p c) Calculați $\int_1^2 x f(x) dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = -3$ $b_5 = b_1 q^4 = (-1)(-3)^4 = -81$, deci $ b_5 = 81$	2p 3p
2.	$-2x^2 + 7x + 9 > 0 \Leftrightarrow (2x - 9)(x + 1) < 0$ $x \in \left(-1, \frac{9}{2}\right)$	2p 3p
3.	$\log_3 \frac{x-1}{6-x} = -2 \Rightarrow \frac{x-1}{6-x} = \frac{1}{9}$ $x = \frac{3}{2}$, care convine	3p 2p
4.	$\frac{n(n-1)}{2} - n = 5 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 5$	3p 2p
5.	Distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu $0 \Rightarrow A \in d$ $-1 = (m-1) \cdot 3 - 2m \Leftrightarrow m = 2$	2p 3p
6.	$\cos(\pi - 2x) = -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ $= 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$ $= 6 - 2 + 2 - 4 + 1 - 6 = -3$	2p 3p
b)	$B(a) = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 8 & 3-2a & -1 \\ 5-a & a^2+a+1 & -2-a \\ 4+a & -a^2-a+2 & -1+a \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a Matricea $B(a)$ are două elemente egale cu 0 dacă $a = -2$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	Pentru $a = 1$, sistemul devine $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ și adunând primele două ecuații ale sistemului obținem $3x + y - z + x - y + z = 4$, deci $x = 1$ Adunând a doua și a treia ecuație din sistem, obținem $x - y + z + 2x + y - z = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$, deci sistemul nu are soluții	3p 2p

2.a)	$(-3)*3 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 3 - (-3) \cdot 3 =$	3p
	$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 9 = 9$	2p
b)	$x * y = \frac{1}{4} - xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} =$	2p
	$= \frac{1}{4} - x\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	3p
c)	$\frac{1}{4} - \left(2^x - \frac{1}{2}\right)\left(4^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}$ sau $4^{x-1} = \frac{1}{2}$	3p
	$x = -1$ sau $x = \frac{1}{2}$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(-1 + 3x^{-1} - 4x^{-\frac{3}{2}}\right)' = 3 \cdot (-1)x^{-2} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} =$	3p
	$= -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3x + 6\sqrt{x}}{x^3} = \frac{3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right) = -1$	3p
	Dreapta de ecuație $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot 3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot 3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-4^x \cdot 3\sqrt{x}}{x^3(\sqrt{x}+2)} = -6$	2p
2.a)	$F'(x) = (\ln x + 2e^x - 2x + 2021)' = \frac{1}{x} + 2e^x - 2 =$	3p
	$= \frac{1 + 2xe^x - 2x}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	2p
b)	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = F(e) - F(1) =$	3p
	$= 2e^e - 4e + 3$	2p
c)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 (2xe^x - 2x + 1) dx = \left((2x-2)e^x - x^2 + x\right) \Big _1^2 =$	3p
	$= 2e^2 - 4 + 2 = 2e^2 - 2$	2p