

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (1 + 6i)^2 + (3 - 2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax$, unde a este număr real astfel încât $f(1) = f(5)$. Arătați că $f(2) = f(4)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2 - 2) = 2 \log_3(x + 1)$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și C , astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$ pentru care $2 \sin x \sin(\pi - x) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1) = A(1)A(a)$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.
2. Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.
- 5p b) Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$, $x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2n))^n$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x^2+4}$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 (x^2+4)f(x)dx = 0$.

5p b) Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^x f(t)dt \geq 0$, pentru orice număr real x .

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n = 1 + 12i + 36i^2 + 9 - 12i + 4i^2 =$ $= 1 - 36 + 9 - 4 = -30$, care este număr întreg negativ	2p 3p
2.	$f(1) = f(5) \Rightarrow 1 + a = 25 + 5a \Rightarrow a = -6$ $f(x) = x^2 - 6x$, de unde obținem $f(2) = -8$ și $f(4) = -8$, deci $f(2) = f(4)$	2p 3p
3.	$2x^2 - 2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 3$, care convine	2p 3p
4.	Există 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile Dacă cifra unităților este c , $1 \leq c \leq 9$, atunci cifra sutelor poate fi aleasă în c moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor există o singură alegere a cifrei zecilor; în total sunt $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{900} = \frac{1}{20}$	2p 2p 1p
5.	$OA = OB = 5$ $m_{AO} = \frac{4}{3}$ și $m_{BO} = -\frac{3}{4} \Rightarrow AO \perp BO$ și, cum $AOBC$ este paralelogram, obținem că $AOBC$ este pătrat, deci triunghiul ACB este dreptunghic isoscel	2p 3p
6.	$2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Cum $x \in (0, \pi)$, obținem $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $x = \frac{\pi}{4}$ sau $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 8 + 4 + 9 - 8 - 6 - 6 = 1$	2p 3p
b)	$A(a)A(1) = \begin{pmatrix} 3a+3 & 5a+4 & 7a+5 \\ 6 & 9 & 12 \\ 2+a & 4+a & 6+a \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $A(1)A(a) = \begin{pmatrix} a+5 & a+8 & 4a+8 \\ a+5 & a+8 & 4a+8 \\ a+2 & a+4 & 2a+5 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a , deci $A(a)A(1) = A(1)A(a)$ implică $a = 1$, care convine	2p 3p

c)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2$, pentru orice număr real a	3p
	Cum $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, matricea $A(a)$ are rangul doi $\Leftrightarrow a = 1$	2p
2.a)	$\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} =$ $= \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} = \hat{3}$	2p 3p
b)	$x \circ \hat{0} = x \cdot \hat{0} + x + \hat{0} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_6$ $\hat{0} \circ x = \hat{0} \cdot x + \hat{0} + x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_6$, deci $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „o”	2p 3p
c)	$\hat{4} \circ \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow \hat{4}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „o” și simetricul lui este $\hat{4}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow \hat{4} \circ x = \hat{4} \circ y \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ este injectivă, de unde obținem că $\text{Im } f$ are 6 elemente, deci $\text{Im } f = \mathbb{Z}_6$, de unde obținem că f este bijectivă	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3} =$ $= \frac{2((x-1)^3 - (x+1)^3)}{(x+1)^3(x-1)^3} = \frac{-4(3x^2+1)}{(x+1)^3(x-1)^3} = \frac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$, $x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$	3p 2p
b)	Cum $f(0) = 0$, graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $O(0,0)$ $f'(0) = 4$, deci ecuația tangentei este $y = 4x$	2p 3p
c)	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + \dots + f(2n))^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^n =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{(2n+1)^2} \right)^{-(2n+1)^2} \right)^{\frac{-n}{(2n+1)^2}} = e^0 = 1$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (x^2 + 4) f(x) dx = \int_0^2 (2x - 2) dx = (x^2 - 2x) \Big _0^2 =$ $= 4 - 4 = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^{2\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+4} dx - 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4} dx = \ln(x^2+4) \Big _0^{2\sqrt{3}} - \arctg \frac{x}{2} \Big _0^{2\sqrt{3}} =$ $= \ln 16 - \ln 4 - \arctg \sqrt{3} = 2 \ln 2 - \frac{\pi}{3}$	3p 2p
c)	Funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ este derivabilă și $F'(x) = f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$ $F'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow F$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ și $F'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow F$ este crescătoare pe $[1, +\infty) \Rightarrow F(x) \geq F(1)$, pentru orice număr real x , de unde obținem că $\int_1^x f(t) dt \geq 0$, pentru orice număr real x	2p 3p