Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=8$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}$.
5p	**4.** Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,2)$ și $N(2,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului M față de punctul N.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=3\sqrt{2}$, $BC=9$ și $AC=3\sqrt{5}$. Calculați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-10a & 8a\\ -5a & 1+4a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-5$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-6ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $A(m)\cdot A(n)=A(6-5mn)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-3x-3y+12$.
5p	**a)** Arătați că $1*3=3$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele numere reale x pentru care $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+2020$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.
5p	**a)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$.
5p	**b)** Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}+\sqrt{11}-\sqrt{11}-3=$	**2p**
	$=11-3=8$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=2$ și $x=3$	**3p**
3.	$x^2+2=27\Rightarrow x^2-25=0$	**2p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	Numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte este egal cu $C_4^2=$	**2p**
	$=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=6$	**3p**
5.	N este mijlocul segmentului MP, unde $P(a,b)$ este simetricul punctului M față de punctul N, deci $2=\dfrac{-1+a}{2}$ și $1=\dfrac{2+b}{2}$	**3p**
	$a=5$ și $b=0$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AB}=$	**2p**
	$=\dfrac{81+18-45}{2\cdot 9\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de unde obținem că măsura unghiului B este de 45°	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{vmatrix}=(-9)\cdot 5-(-5)\cdot 8=$	**3p**
	$=-45+40=-5$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-10b-10a+100ab-40ab & 8b-80ab+8a+32ab\\ -5a+50ab-5b-20ab & -40ab+1+4a+4b+16ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1-10(a+b-6ab) & 8(a+b-6ab)\\ -5(a+b-6ab) & 1+4(a+b-6ab)\end{pmatrix}=A(a+b-6ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n-6mn)=A(6-5mn)$, deci $mn-m-n+6=0$	**2p**
	$(m-1)(n-1)=-5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=0$, $n=6$ sau $m=6$, $n=0$	**3p**
2.a)	$1*3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=$	**3p**
	$=3-3-9+12=3$	**2p**
b)	$x*y=xy-3x-3y+9+3=$	**3p**
	$=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$x*x=(x-3)^2+3$, $x*x*x=(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x-3)^3+3=x$, deci $x=2$, $x=3$ sau $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-5=5\left(x^4-1\right)=$	**3p**
	$=5\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=20x^3$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]\Rightarrow f(x)\le f(-1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
	$f(-1)=2024$, deci $f(x)\le 2024$ pentru orice $x\in[-1,1]$, deci ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$	**3p**
2.a)	$F'(x)=f(x)=\sin x$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\sin x\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, obținem $F'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, deci orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$	**2p**
b)	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x\cos x\,dx=\sin^2 x\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**3p**