

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_{șt-nat}

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 2$.
- 5p** 2. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. Determinați numărul real m , pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(x)M(y) = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $M(m)M(n) = M(6)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.
- 5p** c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x - e}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că graficul funcției f nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x + 2)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = 18$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n , știind că $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \frac{3 \ln 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$ $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 = 6$	2p 3p
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$ $a = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 5x + 7 = (x-1)^2$ $3x = 6$, deci $x = 2$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{m}{3} = \frac{5}{3}$ $m = 5$	3p 2p
6.	$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyAA$ Cum $AA = A$, obținem $M(x)M(y) = I_2 + (x + y + xy)A = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$M(m + n + mn) = M(6) \Leftrightarrow m + n + mn = 6$ $(m+1)(n+1) = 7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = xy - x - y + 1 + 1 =$ $= x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x \circ x = (x-1)^2 + 1$, de unde obținem $(x-1)^2 \leq 4$ $x \in [-1, 3]$	2p 3p
c)	$1 \circ x = 1$, unde x este număr real $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n = 1 \circ (2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n) = 1$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - e(\ln x)' =$ $= 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = 1$</p> $\frac{a - e}{a} = 1 \Leftrightarrow a - e = a \Leftrightarrow e = 0, \text{ ceea ce este imposibil, deci graficul funcției } f \text{ nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație } y = x$	3p 2p
c)	<p>$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, e) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, e)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e, +\infty)$</p> $e^x - x^e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ și, cum } f(e) = 0, \text{ ecuația } e^x - x^e = 0 \text{ are exact o soluție în } (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^3 x(x+2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 9 - 0 = 18$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) e^x dx = (x^2 + 2x) e^x \Big _0^1 - \int_0^1 (2x + 2) e^x dx =$ $= 3e - (2x + 2) e^x \Big _0^1 + \int_0^1 2e^x dx = 3e - 4e + 2 + 2e - 2 = e$	2p 3p
c)	$\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \int_1^n \frac{x+1}{x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x) \Big _1^n = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2 + 2n}{3}$ $\frac{1}{2} \ln \frac{n^2 + 2n}{3} = \frac{3 \ln 2}{2} \Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0 \text{ și, cum } n \text{ este număr natural nenul, obținem } n = 4$	3p 2p