

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_3 = 7$ și $a_7 = 15$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x) \geq 2f(1) + 4$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $81^x = 3$.
- 5p 4. Calculați $\frac{A_6^2}{P_3}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(0,-5)$ și $C(4,-1)$. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Arătați că $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A = I_2$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX - I_2 = 2021A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.
- 5p a) Arătați că $5 \circ 2021 = 5$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele întregi m și n pentru care $m^2 \circ n = 16$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 8)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = (x - 2)(x + 4)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x - 2}$.
- 5p c) Demonstrați că $x^2 \geq 8 - 4e^{2-x}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Arătați că $\int_2^3 f(x) dx = 1 + \ln \frac{9}{16}$.
- 5p c) Determinați numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a f(x) f'(x) dx = \frac{1}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_7 = a_3 + 4r$ $15 = 7 + 4r \Rightarrow r = 2$	2p 3p
2.	$3x - 5 \geq 2 \cdot (-2) + 4$ $3x \geq 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$	2p 3p
3.	$3^{4x} = 3$ $4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	2p 3p
4.	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ $P_3 = 3!, P_3 = 6, \frac{A_6^2}{P_3} = 5$	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (-5-3)^2} = 8, AC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}$ Cum $AB^2 = AC^2 + BC^2$, triunghiul ACB dreptunghic și cum $AC = BC$, $\triangle ACB$ este dreptunghic isoscel	3p 2p
6.	$\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 =$ $= -4 + 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$AX - I_2 = 2021A \Leftrightarrow AX = I_2 + 2021A$. Matricea A este inversabilă și $A^{-1} = A$ de unde rezultă că $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I_2 + 2021 \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = A + 2021 \cdot I_2$	3p

	Deci $X = \begin{pmatrix} 2023 & 1 \\ -3 & 2019 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$5 \circ 2021 = 5 \cdot 2021 - 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2021 + 30 =$ $= -25 + 30 = 5$	3p 2p
b)	$x \circ y = xy - 5x - 5y + 25 + 5 = x(y - 5) - 5(y - 5) + 5 =$ $= (x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$m^2 \circ n = 16 \Rightarrow (m^2 - 5)(n - 5) = 11$ și, deoarece, $n - 5 \in \mathbb{Z}$, $m^2 - 5 \in \mathbb{Z}$ obținem $\begin{cases} m^2 - 5 = 11 \\ n - 5 = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = 1 \\ n - 5 = 11 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = -11 \\ n - 5 = -1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2 - 5 = -1 \\ n - 5 = -11 \end{cases}$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem soluțiile $\begin{cases} m = 4 \\ n = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = -4 \\ n = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 2 \\ n = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} m = -2 \\ n = -6 \end{cases}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 8)e^x =$ $= e^x(x^2 + 2x - 8) = e^x(x - 2)(x + 4)$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x(x - 2)(x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} e^x(x + 4) =$ $= 6e^2$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 8}{e^{-x}} = 0$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -4] \Rightarrow f$ este crescătoare și $f(x) \geq 0$ pe $(-\infty, -4]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-4, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare și $f(x) \geq f(2)$ pe $[-4, 2]$; $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare și $f(x) \geq f(2)$ pe $[2, +\infty)$, $f(2) = -4e^2 < 0$ Obținem că $f(x) \geq -4e^2$ pentru orice număr real $x \Leftrightarrow (x^2 - 8)e^x \geq -4e^2$, de unde rezultă $x^2 \geq 8 - 4e^{2-x}$, pentru orice număr real x	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 f(x)(x+1) dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}(x+1) dx = \int_1^2 (x-1) dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _1^2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_2^3 \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx =$ $= (x - 2 \ln x+1) \Big _2^3 = 1 + \ln \frac{9}{16}$	2p 3p
c)	$\int_1^a f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2 \Big _1^a = \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2$, unde $a > 1$ $\frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \pm \frac{1}{2}$, obținem $a = 3$, care convine	3p 2p