

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$ este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^2 + 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M(2,3)$, $N(5,4)$ și $P(4,0)$. Determinați ecuația dreptei MQ .
- 5p 6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1,0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, dacă $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$.

5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

**Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat***

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2 = 3 + 4\sqrt{3} - (7 + 4\sqrt{3}) =$ $= 3 + 4\sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3} = -4$, care este număr întreg	3p 2p
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a + 3 = 4a^2 + 2a \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4}$ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p 2p
3.	$2^{x^2+4x+2} = 2^6 \cdot 2^x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 6 + x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ sunt -2 și 4 , deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$MQ \parallel NP \Rightarrow m_{MQ} = m_{NP}$, deci $m_{MQ} = 4$ Ecuația dreptei MQ este $y - 3 = 4(x - 2)$, deci $y = 4x - 5$	3p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ și, cum $R = 5$, obținem $\sin A = \frac{BC}{10}$, $\sin B = \frac{AC}{10}$ și $\sin C = \frac{AB}{10}$ $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{BC}{10} \cdot \frac{AC}{10} \cdot \frac{AB}{10} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,0)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -1 - (-1) = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{vmatrix} = 2(b-a+1)$, pentru orice numere reale a și b $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty) \Rightarrow b - a + 1 > 1 \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	2p 3p
c)	$A(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A(1,3)) = 6$, deci $A(1,3)$ este inversabilă și $(A(1,3))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $X = (A(1,3))^{-1} \cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1 \circ (-1) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (1 + (-1)) + \frac{2}{3} =$ $= -3 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$	2p
b)	$x \circ y = 3xy - x - y + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3x \left(y - \frac{1}{3} \right) - \left(y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} =$ $= \left(y - \frac{1}{3} \right) (3x - 1) + \frac{1}{3} = 3 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p
c)	$x \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{1}{3} \circ y = \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} = \left(\left(1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \circ \frac{1}{3} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} =$ $= \frac{1}{3} \circ \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} \right) = \frac{1}{3}$	2p
		3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1' - \frac{1' \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= -\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ este ecuația asimptotei spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f,$ <p>deci panta asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este egală cu 0</p> <p>Panta dreptei de ecuație $y = 2021$ este egală cu 0, deci asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f și dreapta de ecuație $y = 2021$ sunt paralele, deoarece au pante egale</p>	3p
c)	$f''(x) = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R} \text{ și } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sau } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f''(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], f''(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \text{ și}$ $f''(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right), \text{ deci } x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sunt punctele de inflexiune ale funcției } f$	2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = \int_1^2 \frac{e^x \sin x}{\sin x} dx = \int_1^2 e^x dx =$ $= e^x \Big _1^2 = e^2 - e = e(e - 1)$	2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' dx = e^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^2 - e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx =$ $= e^2 + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx, \text{ deci } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{e^2 + 1}{2}$	3p
		2p

e)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x - \frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \cdot \ln \sin x \Big _{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$	3p
	$= -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left(\ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$	