Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N} \mid n^2<7+\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA.

5p **6.** Arătați că $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & 2a & 0\\ -a & 1+2a & 0\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3*4=5$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-1}^1 \left|x\ln\left(f(x)\right)\right| dx = 2\ln 2 - 1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+\sqrt{7}\in(9,10)$ și, cum n este număr natural, obținem $M=\{0,1,2,3\}$	**3p**
	Mulțimea M are 4 elemente	**2p**
2.	$\Delta=36-4m \Rightarrow y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=m-9$	**3p**
	$m-9>0 \Leftrightarrow m\in(9,+\infty)$	**2p**
3.	$x+3=(x-3)^2 \Rightarrow x^2-7x+6=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine; $x=6$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are $C_{12}^0+C_{12}^1+C_{12}^2=1+12+\dfrac{12\cdot 11}{2}=$	**3p**
	$=13+66=79$ de submulțimi cu cel mult 2 elemente	**2p**
5.	Paralela prin A la OB intersectează paralela prin B la OA în punctul $C\Rightarrow OACB$ este paralelogram	**2p**
	OC și AB au același mijloc, deci $x_O+x_C=x_A+x_B$, $y_O+y_C=y_A+y_B$, de unde obținem $x_C=3$ și $y_C=3$	**3p**
6.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-4)=4$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-a-b-ab&2b+2ab+2a&0\\-a-b-ab&1+2a+2b+2ab&0\\0&0&1+a+b+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(a+b+ab)&2(a+b+ab)&0\\-(a+b+ab)&1+2(a+b+ab)&0\\0&0&1+(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

c)	Cum $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(a+b+ab)\cdot A(c)=A(a+b+c+ab+ac+bc+abc)$, obținem $a+b+c+ab+ac+bc+abc=0$	**3p**
	$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc=1\Rightarrow(1+a)+b(1+a)+c(1+a)+bc(1+a)=1$, de unde obținem $(1+a)(1+b+c+bc)=1$, deci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$	**2p**
2.a)	$3*4=\sqrt{3^2+4^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{25}=5$	**2p**
b)	$x*\sqrt{5}=\sqrt{x^2+5}$, $x\in M$	**2p**
	Cum $\sqrt{x^2+5}<x+1\Rightarrow x^2+5<x^2+2x+1$, obținem $x\in(2,+\infty)$	**3p**
c)	Pentru $m=3k$ și $n=4k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$, obținem $m*n=5k$	**2p**
	Cum numerele $3k$, $4k$ și $5k$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n), de forma $(3k,4k)$, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}=$	**3p**
	$=1-\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{(x-2)^2+1}>x-2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x+5}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}=2$, deci ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\left(x^2+1\right)dx=\left.e^x\left(x^2+1\right)\right\|_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=2e-1-\left.(2x-2)e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-2=2e-3$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1\left\|x\ln(f(x))\right\|dx=\int_{-1}^0(-x)\ln\left(x^2+1\right)dx+\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1 2x\ln\left(x^2+1\right)dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\left(x^2+1\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)\right\|_0^1-\int_0^1\left(x^2+1\right)\dfrac{2x}{x^2+1}dx=2\ln2-\left.x^2\right\|_0^1=2\ln2-1$	**3p**