

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 1**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $3(2 - \sqrt{20}) + \sqrt{180} = 6$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$ . Calculați  $(f \circ f)(1)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(5x - 1) = \lg 2 + \lg 7$ .
- 5p 4. După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,3)$ ,  $B(4,8)$  și  $C(4,0)$ . Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $AC$ .
- 5p 6. Arătați că  $\frac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg} 45^\circ + 1} = \operatorname{tg} 30^\circ$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(10)) = 10$ .
- 5p b) Demonstrați că  $(A(a) - A(b))(A(a) - A(b)) = 3(a - b)(A(a) - A(b))$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $\det(A(2)) + \det(A(3)) + \dots + \det(A(n)) = 35$ .
2. Pe mulțimea  $M = [\sqrt{2}, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2)} + 2$ .
- 5p a) Arătați că  $4 * \sqrt{3} = 4$ .
- 5p b) Determinați simetricul elementului  $x = \sqrt{6}$ , în raport cu legea de compoziție „\*”.
- 5p c) Calculați  $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = \frac{1}{e}$  situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{3x - 1}{x + 1}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

**5p** b) Calculați  $\int_1^2 f(x) dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_{-1}^0 e^x f(x) dx = \frac{5-3e}{e}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_tehnologic**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$3(2 - \sqrt{20}) + \sqrt{180} = 3(2 - 2\sqrt{5}) + 6\sqrt{5} =$ $= 6 - 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 6$	3p 2p
2.	$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ $(f \circ f)(1) = f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$	2p 3p
3.	$\lg(5x - 1) = \lg 14 \Rightarrow 5x - 1 = 14$ $x = 3$ , care convine	3p 2p
4.	$x + \frac{30}{100} \cdot x = 5200$ , unde $x$ este prețul inițial al obiectului $x = 4000$ de lei	3p 2p
5.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$ $AC = 5$ și, cum $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{d(B, AC) \cdot AC}{2}$ , obținem $d(B, AC) = \frac{32}{5}$	2p 3p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2 \cos 30^\circ}{2 \operatorname{tg} 45^\circ + 1} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(10)) = \begin{vmatrix} 11 & 21 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 11 \cdot 20 - 21 \cdot 10 =$ $= 220 - 210 = 10$	3p 2p
b)	$A(a) - A(b) = \begin{pmatrix} a-b & 2(a-b) \\ a-b & 2(a-b) \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $(A(a) - A(b))(A(a) - A(b)) = (a-b)^2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3(a-b)^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(a-b)(A(a) - A(b))$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	2p 3p
c)	Pentru orice număr natural $n$ , $\det(A(n)) = n$ , deci $\det(A(2)) + \det(A(3)) + \dots + \det(A(n)) =$ $= 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 35$ , deci $n(n+1) = 72$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 8$	3p 2p

<b>2.a)</b>	$4 * \sqrt{3} = \sqrt{(4^2 - 2)(3 - 2) + 2} = \sqrt{4^2 - 2 + 2} = \sqrt{16} = 4$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * \sqrt{3} = \sqrt{3} * x = x$ , pentru orice $x \in M$ , deci $e = \sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*” $t * \sqrt{6} = \sqrt{6} * t = \sqrt{3}$ , unde $t$ este simetricul lui $x = \sqrt{6}$ , deci $\sqrt{4(t^2 - 2) + 2} = \sqrt{3}$ , de unde $t^2 = \frac{9}{4}$ și, cum $t \in M$ , obținem $t = \frac{3}{2}$ , care convine	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\sqrt{2} * x = \sqrt{(2 - 2)(x^2 - 2) + 2} = \sqrt{2}$ , unde $x \in M$ $\sqrt{2} * \sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020} = \sqrt{2} * (\sqrt{3} * \sqrt{4} * \dots * \sqrt{2020}) = \sqrt{2}$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}(\ln x + 1)}{x}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ , $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{4}{\sqrt{e}}$ Ecuația tangentei este $y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$ , deci $y = -\frac{4}{\sqrt{e}}$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ , deci $f(x) \geq -\frac{4}{\sqrt{e}}$ , de unde obținem $\sqrt{e}f(x) + 4 \geq 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0) \Rightarrow$ funcția $f$ este continuă în $x = 0$ $f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty) \Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , deci funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{3x-1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{3x+3-4}{x+1} dx = \int_1^2 \left(3 - \frac{4}{x+1}\right) dx = (3x - 4 \ln(x+1)) \Big _1^2 = 6 - 4 \ln 3 - 3 + 4 \ln 2 = 3 + 4 \ln \frac{2}{3}$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_{-1}^0 e^x f(x) dx = \int_{-1}^0 e^x (2x-1) dx = e^x (2x-3) \Big _{-1}^0 = e^0 \cdot (-3) - e^{-1} \cdot (-5) = \frac{5-3e}{e}$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>