Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că primul termen este $b_1 = 2$ și rația este $q = 3$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x}=3-x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{50}\right\}$, acesta să **nu** fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2-4\cos x(\sin x-\cos x)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.
	2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.
5p	**a)** Arătați că $N=\sqrt{33}*\sqrt{31}$ este un număr natural.
5p	**b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $(x*x*x)^2=300$.
5p	**c)** Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(5-x)(x+1)}{\left(x^2+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.
5p	**a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6$, $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$	**3p**
	$b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	**3p**
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{43}{50}$	**2p**
5.	Punctul $M(-2,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuația medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 4\cos x\sin x + 4\cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 4$	**3p**
	$\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \frac{\pi}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$	**3p**
	$= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(2020 - x) + A(2020 + x) = \begin{pmatrix} 2020 - x & 3 \\ -3 & 2020 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020 + x & 3 \\ -3 & 2020 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 - n & 3 \\ -3 & 2 - n \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$	**3p**
	$n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	**2p**
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33 + 31} =$	**3p**
	$= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	**2p**
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$	**2p**
	$\left(x\sqrt{3}\right)^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	**3p**

c)	$f(x+y)=\sqrt{-2020(x+y)}=$	**2p**
	$=\sqrt{-2020x+(-2020y)}=\sqrt{(f(x))^2+(f(y))^2}=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+5)-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{5+4x-x^2}{(x^2+5)^2}=\dfrac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=5$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,5]\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f e crescătoare pe $[-1,5]$ și $x\in[5,+\infty)\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $[5,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(5)=\dfrac{1}{10}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, obținem $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}=$	**3p**
	$=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=\dfrac{\ln x}{x^3}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln e}{e^3}-\dfrac{\ln 1}{1^3}=\dfrac{1}{e^3}$	**2p**
c)	$\int_e^{e^2} x^2F(x)\,dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\dfrac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e^2-\ln^2 e}{2}=\dfrac{2^2-1^2}{2}=\dfrac{3}{2}$	**2p**