Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2-11x+m=0$ sunt numere reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(7x)+\log_x 7=3$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(-4,4)$ și $C(-4,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2-a\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=14$

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\left(2^n+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}\right)=2^{20}+\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}\,dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}\,dt=x$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+2\sqrt{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=$	**3p**
	$=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$, care este număr natural	**2p**
2.	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=7$	**3p**
	$f(2)=5$, deci $(f\circ f)(1)=f(2)+2$	**2p**
3.	$3^{2x^2}=3^{x+1}\Leftrightarrow 2x^2=x+1$	**2p**
	$2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**3p**
4.	Numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii A este C_n^2	**2p**
	$\frac{n!}{2!(n-2)!}=10\Leftrightarrow n^2-n-20=0$ și, cum n este număr natural, obţinem $n=5$	**3p**
5.	$AM=AN$, deci $a=4$	**3p**
	$A(4,3)$, deci $AO=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
6.	$3\cos x-2=4\cos^2 x-2\Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(4\cos x-3)=0$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-2)+0+0-0-(-5)-0=3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & 2-a & a\\ a-1 & a-1 & 1-a\\ a & 2a-5 & a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1 & 2-a & a\\ 1 & 1 & -1\\ a & 2a-5 & a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1 & 1-a & a+1\\ 1 & 0 & 0\\ a & a-5 & 2a-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-(a-1)\begin{vmatrix}1-a & a+1\\ a-5 & 2a-2\end{vmatrix}=(a-1)(3a^2-8a-3)=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci, pentru $a\in\mathbb{N}$, obținem $a\in\mathbb{N}\setminus\{1,3\}$ și, cum x_0, y_0, $z_0\in\mathbb{N}$ și $ax_0+y_0+z_0=2-a$, obținem $2-a\in\mathbb{N}$	**3p**
	$a=2$, care nu convine, $a=0$ care convine	**2p**
2.a)	$0*0=\log_2\left(2^0+2^0\right)=\log_2(1+1)=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**

b)	$x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)=\log_2\left(2^y+2^x\right)=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
c)	$(x*x)*x=\log_2\left(2^x+2^x\right)*x=\log_2\left(2^{x+1}\right)*x=(x+1)*x=\log_2\left(2^{x+1}+2^x\right)=\log_2\left(2^x\cdot 3\right)$, unde x este număr real	**3p**
	$\log_2\left(2^x\cdot 3\right)=3+\log_2 3$, de unde obținem $x=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și pe $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, f este strict crescătoare pe $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ și pe $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**3p**
	Cum $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<m$, $f(0)=1>m$ și $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<m$, obținem că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuaţia $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{x^2+2x+5}{x}dx=\int_1^2\left(x^2+2x+5\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+5x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{8}{3}+4+10-\dfrac{1}{3}-1-5=\dfrac{7}{3}+8=\dfrac{31}{3}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+2x+5\right)'}{x^2+2x+5}dx=$	**3p**
	$=\left.\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$	**2p**
c)	$x^{2n}\geq 0$ și $x^2+2x+5\geq 4\Rightarrow 0\leq\dfrac{x^{2n}}{x^2+2x+5}\leq\dfrac{x^{2n}}{4}$, pentru orice $x\in[-1,1]$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
	$\displaystyle 0\leq\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx\leq\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx$ și, cum $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx=\frac{1}{2(2n+1)}$ și $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=0$, obținem $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**