

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20} = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \cdot 8^{x+1} = 16^{2x}$.
- 5p 4. Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a, a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.
- 5p 6. Demonstrați că $(2 \sin x + 3 \cos x)^2 + (3 \sin x - 2 \cos x)^2 = 13$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy - x - y + 1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că $A(a) = A(x) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - \frac{xy}{4}$.
- 5p a) Arătați că $6 * 2 = 5$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x * (4x) = 6$.
- 5p c) Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2019$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + \frac{x-3}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că funcția f este convexă pe $[5, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că $x - 3 \leq e^{x-4}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 + 4x + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 5$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = 13 + \ln a$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, deci $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20} = 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 6$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, deci $x = -3$ sau $x = 1$ Distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 4	3p 2p
3.	$2^{2x} \cdot 2^{3x+3} = 2^{8x} \Leftrightarrow 2^{5x+3} = 2^{8x}$ $5x + 3 = 8x$, deci $x = 1$	3p 2p
4.	Numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15 sunt formate cu cifrele 1, 3 și 5 Numerele sunt 135, 153, 315, 351, 513 și 531	3p 2p
5.	$a + 1 = 2a - 1$ $a = 2$	3p 2p
6.	$4\sin^2 x + 12\sin x \cos x + 9\cos^2 x + 9\sin^2 x - 12\sin x \cos x + 4\cos^2 x =$ $= 13\sin^2 x + 13\cos^2 x = 13(\sin^2 x + \cos^2 x) = 13$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y-1 \\ y-1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + xy - x - y + 1 & xy - x + xy - y \\ xy - y + xy - x & xy - x - y + 1 + xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2xy - x - y + 1 & 2xy - x - y + 1 - 1 \\ 2xy - x - y + 1 - 1 & 2xy - x - y + 1 \end{pmatrix} = A(2xy - x - y + 1)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(x) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(y) = A\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} - y + 1\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y Pentru orice numere reale x și y , $\left(A(x) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot A(y) = A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(y) = A\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $a = \frac{1}{2}$	2p 3p
2.a)	$6 * 2 = 6 + 2 - \frac{6 \cdot 2}{4} =$ $= 8 - 3 = 5$	3p 2p

b)	$x + 4x - \frac{x \cdot 4x}{4} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2$ sau $x = 3$	3p 2p
c)	$x * 4 = 4$ și $4 * y = 4$, pentru orice numere reale x și y $1 * 2 * 3 * \dots * 2019 = ((1 * 2 * 3) * 4) * (5 * 6 * \dots * 2019) = 4 * (5 * 6 * \dots * 2019) = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-3) \cdot e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{e^x(1 - (x-3))}{e^{2x}} = \frac{4-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{x-5}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [5, +\infty)$, deci funcția f este convexă pe $[5, +\infty)$	3p 2p
c)	$x \in (-\infty, 4] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, 4]$ și $x \in [4, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[4, +\infty)$ $f(x) \leq f(4)$, pentru orice număr real $x \Rightarrow 3 + \frac{x-3}{e^x} \leq 3 + \frac{1}{e^4}$, deci $x-3 \leq e^{x-4}$, pentru orice număr real x	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (6x^2 + 4x + 1) dx = (2x^3 + 2x^2 + x) \Big _0^1 =$ $= 2 + 2 + 1 - 0 = 5$	3p 2p
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = 6x^2 + 4x + 1, x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția F este crescătoare pe \mathbb{R}	2p 3p
c)	$\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^a \left(6x + 4 + \frac{1}{x}\right) dx = (3x^2 + 4x + \ln x) \Big _1^a = 3a^2 + 4a + \ln a - 7$ $3a^2 + 4a + \ln a - 7 = 13 + \ln a \Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 20 = 0$, de unde obținem $a = -\frac{10}{3}$ care nu convine, $a = 2$ care convine	2p 3p