

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , știind că $3z + 2\bar{z} = 5 + 2i$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f \circ f)(x) = x + 3$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x + 3) - \log_3 x = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.
- 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (5a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și $\cos A = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Calculați $\det(M(-1))$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x) + M(y) = M(0) + M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați perechile de numere naturale m și n , știind că suma elementelor matricei $M(m) \cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1) \cdot M(n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = 1 - 4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \ln x - x^2 - 3x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că $5 \ln x \leq x^2 + 3x - 4$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$.
- 5p a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^2 e^x - 5e^x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^2 - 1}{e^3} \leq \int_{-3}^{-1} f(x) dx \leq \frac{2(e^2 - 1)}{e^3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(a+ib)+2(a-ib)=5+2i \Leftrightarrow 5a+ib=5+2i$, unde $z=a+ib$ cu a și b numere reale $a=1$ și $b=2$, deci $z=1+2i$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(x)=f(x+a)=x+2a$, $(f \circ f \circ f)(x)=x+3a$ $x+3a=x+3$, pentru orice număr real x , deci $a=1$	3p 2p
3.	$\log_3 \frac{2x+3}{x}=1 \Rightarrow \frac{2x+3}{x}=3$ $2x+3=3x \Rightarrow x=3$, care convine	3p 2p
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile Sunt 90 de numere naturale de trei cifre care se divid cu 10, deci sunt 90 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$	1p 2p 2p
5.	$\frac{a+1}{1} = \frac{5a-1}{3} \Leftrightarrow 3a+3=5a-1$ $a=2$	3p 2p
6.	$\sin A = \frac{4}{5}$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}}{2} = 24$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(-1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 0+0+0 - (-4) - 0 - 0 = 4$	2p 3p
b)	$M(x)+M(y) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+1 & 0 & y+2 \\ 0 & y & 0 \\ 3-y & 0 & 4-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2 & 0 & x+y+4 \\ 0 & x+y & 0 \\ 6-x-y & 0 & 8-x-y \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x+y)+1 & 0 & (x+y)+2 \\ 0 & x+y & 0 \\ 3-(x+y) & 0 & 4-(x+y) \end{pmatrix} = M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

c)	$M(m) \cdot M(1) = \begin{pmatrix} 4m+6 & 0 & 6m+9 \\ 0 & m & 0 \\ 14-4m & 0 & 21-6m \end{pmatrix}, M(1) \cdot M(n) = \begin{pmatrix} 11-n & 0 & 16-n \\ 0 & n & 0 \\ 11-n & 0 & 16-n \end{pmatrix},$ unde m și n sunt numere naturale $50 + m = 54 - 3n \Leftrightarrow m + 3n = 4$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = 1, n = 1$ sau $m = 4, n = 0$	2p 3p
2.a)	$x * y = 1 - 4xy + 4x + 4y - 4 =$ $= 1 - 4x(y-1) + 4(y-1) = 1 - 4(x-1)(y-1),$ pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$x * \frac{1}{x} = 1 - 4(x-1)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - 4(x-1) \cdot \frac{1-x}{x} =$ $= 1 + \frac{4(x-1)^2}{x} \geq 1,$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
c)	$x * x = 1 - 4(x-1)^2, x * x * x = 1 + 4^2(x-1)^3, x * x * x * x = 1 - 4^3(x-1)^4,$ unde x este număr real $(x-1)(1 + 4^3(x-1)^3) = 0,$ deci $x = \frac{3}{4}$ sau $x = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} - 2x - 3 =$ $= \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x} = \frac{(1-x)(2x+5)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{-2x^2 - 5}{x^2}, x \in (0, +\infty)$ $f''(x) < 0,$ pentru orice $x \in (0, +\infty),$ deci funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$	2p 3p
c)	f este crescătoare pe $(0, 1]$ și descrescătoare pe $[1, +\infty),$ deci $f(x) \leq f(1),$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f(1) = -4 \Rightarrow 5 \ln x - x^2 - 3x \leq -4,$ deci $5 \ln x \leq x^2 + 3x - 4,$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x, x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0,$ pentru orice număr real $x,$ deci funcția F este crescătoare pe \mathbb{R}	2p 3p
b)	$\int_0^1 \left((x^2 + 4x + 5)e^x - x^2 e^x - 5e^x \right) dx = \int_0^1 4x e^x dx = 4(x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= 0 - 4 \cdot (-1) = 4$	3p 2p
c)	Pentru orice $x \in [-3, -1],$ obținem $1 \leq x^2 + 4x + 5 \leq 2,$ deci $e^x \leq f(x) \leq 2e^x$ $\int_{-3}^{-1} e^x dx \leq \int_{-3}^{-1} f(x) dx \leq 2 \int_{-3}^{-1} e^x dx$ și, cum $\int_{-3}^{-1} e^x dx = \frac{e^2 - 1}{e^3} \Rightarrow \frac{e^2 - 1}{e^3} \leq \int_{-3}^{-1} f(x) dx \leq \frac{2(e^2 - 1)}{e^3}$	2p 3p