Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2 x-\log_x 2=1$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}$, deci $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NA}=\vec{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=-a^2+3a=a(3-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$\det(A(0))=0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\ne 0$	**2p**
	Minor caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=3\ne 0$, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$ și soluția sistemului este $\left(1-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$	**3p**
	x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și a este număr întreg, obținem $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 1} =$	**2p**
	$= \sqrt{x^2\left(y^2+1\right) + \left(y^2+1\right) - 1} = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1} = 1 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) = 2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**3p**
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n - 1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = (2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1} = 2m^2 + 2m + 1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$	**3p**
	$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1} = 0$, deci dreapta de ecuație $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1 \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, deci $\operatorname{Im} f = (2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx = \int_1^2 \left(3x^2-2x\right)dx = \left(x^3-x^2\right)\Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 8-4-1+1 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' \ln(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\vert_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)dx =$	**3p**
	$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^1 = \frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{3t^2} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	**2p**