

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați conjugatul numărului complex $z = (1-i)(2+i) + 5i$.
- 5p 2. Determinați numerele naturale n pentru care $n^2 + n - 12 < 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1) = 2\lg(x-5)$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$. Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinați lungimea vectorului $\vec{BD}$.
- 5p 6. Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Calculați $\det(A(2))$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a) + aA(0)) = 8$.
- 5p c) Știind că $\det((m+n)A(x)) = \det(mA(x)) + \det(nA(x)) + 18$, pentru orice număr real x , determinați numerele naturale m și n , $m < n$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_7$.
- 5p b) Demonstrați că $x * \hat{1} = \hat{1} * x = \hat{1}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_7$.
- 5p c) Calculați $\hat{0} * \hat{1} * \hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $(x-3)^2 \leq 4e^{1-x}$, pentru orice $x \in (-\infty, 3]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\int_{-1}^e f(x) dx = 2(4 - \sqrt{e})$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x) dx = \frac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = 3 + 4i$ $\bar{z} = 3 - 4i$	3p 2p
2.	Cum n este număr natural, $(n+4)(n-3) < 0 \Rightarrow n < 3$ $n = 0$, $n = 1$ sau $n = 2$	2p 3p
3.	$\lg(x+1) = \lg(x-5)^2 \Rightarrow x+1 = (x-5)^2$ $x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x = 3$, care nu verifică ecuația și $x = 8$, care verifică ecuația	2p 3p
4.	O mulțime cu n elemente are C_n^2 submulțimi cu două elemente $\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n = 10$	2p 3p
5.	$\vec{v} = 2\vec{AC}$, deci $AC = 10$ Cum $ABCD$ este dreptunghi, obținem $BD = 10$	3p 2p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a) + aA(0)) = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 2a \\ -2a & a+1 & -2a^2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3$ $(a+1)^3 = 2^3 \Rightarrow a = 1$	3p 2p
c)	$(m+n)^3 = m^3 + n^3 + 18$ $mn(m+n) = 6$ deci, cum m și n sunt numere naturale și $m < n$, obținem $m = 1$ și $n = 2$	2p 3p
2.a)	$x * y = (xy + \hat{6}x) + (\hat{6}y + \hat{1}) + \hat{1} =$ $= x(y + \hat{6}) + \hat{6}(y + \hat{6}) + \hat{1} = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_7$	3p 2p
b)	$x * \hat{1} = (x + \hat{6})(\hat{1} + \hat{6}) + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1}$ $\hat{1} * x = (\hat{1} + \hat{6})(x + \hat{6}) + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} = x * \hat{1}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_7$	2p 3p

c)	$\hat{0} * \hat{1} * \hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6} = (\hat{0} * \hat{1}) * \hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6} =$ $= \hat{1} * (\hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6}) = \hat{1}$	3p 2p
----	---	---------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)'(x^2 - 6x + 9) + e^x(x^2 - 6x + 9)' =$ $= e^x(x^2 - 6x + 9 + 2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3), x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ și } x = 3$ $f'(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 1), f'(x) < 0 \text{ pentru orice } x \in (1, 3) \text{ și } f'(x) > 0 \text{ pentru}$ $\text{orice } x \in (3, +\infty), \text{ deci punctele de extrem ale funcției } f \text{ sunt } x = 1 \text{ și } x = 3$	2p 3p
c)	$f \text{ este crescătoare pe } x \in (-\infty, 1] \text{ și descrescătoare pe } x \in [1, 3], \text{ deci } f(x) \leq f(1) \text{ pentru}$ $\text{orice } x \in (-\infty, 3]$ $f(1) = 4e, \text{ deci } f(x) \leq 4e \Leftrightarrow e^x(x-3)^2 \leq 4e \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 4e^{1-x}, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 3]$	3p 2p
2.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (3x^2 - 4x + 1) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \text{ și, cum } f(1) = 0, \text{ obținem}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \text{ deci funcția } f \text{ este continuă în } x = 1$ Cum funcția f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^e f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 1) dx + \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ $= \left(x^3 - 2x^2 + x \right) \Big _{-1}^1 + \left(2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} \right) \Big _1^e = 4 - 2\sqrt{e} + 4 = 2(4 - \sqrt{e})$	2p 3p
c)	$\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x) dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} \Big _{e^n}^{e^{n+1}} = \frac{3n^2 + 3n + 1}{3}$ $\frac{3n^2 + 3n + 1}{3} = \frac{7}{3} \text{ și, cum } n \text{ este număr natural, obținem } n = 1$	3p 2p