

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați partea întreagă a numărului real $a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că $(f \circ f)(x) = f(x+1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 6$, $MP = 8$ și $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{MP}$.
- 5p** 6. Determinați numărul real x , știind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1-x) = \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{20} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{19}\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}$.
- 5p** a) Demonstrați că $x \circ y = (x + \hat{3})(y + \hat{3})$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_{20}$.
- 5p** b) Determinați $a \in \mathbb{Z}_{20}$, știind că $a \circ x = \hat{0}$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}_{20}$.
- 5p** c) Dați exemplu de $a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\hat{17}\}$ pentru care $a \circ b = \hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{7}{2}$.
- 5p** b) Determinați imaginea funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $2e^{2x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{8} \geq 0$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx$.

5p c) Demonstrați că $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+2} \leq (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a = 5 + \sqrt{5}$ Cum $2 < \sqrt{5} < 3$, obținem $[a] = 5 + [\sqrt{5}] = 7$	2p 3p
2.	$(f \circ f)(x) = x + 2m$, $f(x+1) = x + 1 + m$ $x + 2m = x + 1 + m$, deci $m = 1$	2p 3p
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5} \Leftrightarrow 4x+1 \geq 3x+5$ $x \in [4, +\infty)$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^3 + C_{10}^4 + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 - C_{10}^2 = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$	3p 2p
5.	$\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ = NP = 10$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2}{\operatorname{tg} x} = 0$ $\operatorname{tg} x = -1$ și, cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, obținem $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} + 0 + 0 - \frac{(2x-1)^2}{2} - 0 - 0 = \frac{-3x^2 + 4x - 1}{2}$ $x = \frac{1}{3}$ sau $x = 1$	3p 2p
b)	$A(x) + A(1-x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1-2x \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1-2x & 0 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x	3p 2p

c)	$\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$x \circ y = (xy + \hat{3}x) + (\hat{3}y + \hat{9}) =$ $= x(y + \hat{3}) + \hat{3}(y + \hat{3}) = (x + \hat{3})(y + \hat{3}), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Z}_{20}$	2p 3p
b)	$(a + \hat{3})(x + \hat{3}) = \hat{0}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Z}_{20}$ $a + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow a = \hat{17}$	2p 3p
c)	$(a + \hat{3})(b + \hat{3}) = \hat{0}$ De exemplu, pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, obținem $a + \hat{3} = \hat{4}$ și $b + \hat{3} = \hat{5}$, deci $a \circ b = \hat{0}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{7}{2}$	2p 3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ $f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \text{ deci } f \text{ este descrescătoare pe } \left(0, \frac{1}{4}\right] \text{ și } f'(x) \geq 0,$ $\text{pentru orice } x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right), \text{ deci } f \text{ este crescătoare pe } \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ $f \text{ continuă pe } (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) \text{ și, cum } f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8},$ $\text{obținem } \text{Im } f = \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right)$	1p 2p 2p
c)	$e^x > 0, \text{ deci } f(e^x) \geq -\frac{3}{8}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$ $2(e^x)^2 - \sqrt{e^x} \geq -\frac{3}{8}, \text{ deci } 2e^{2x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{8} \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f(\text{tg } x) dx = \int_0^1 \text{arctg}(\text{tg } x) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 (\text{arctg } x)' \text{arctg } x dx = \frac{1}{2} \text{arctg}^2 x \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} \text{arctg}^2 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$	3p 2p

c)	$(n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 (x^{n+1})' \arctg x dx = x^{n+1} \arctg x \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx$	2p
	$x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 x^{n+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \text{ și, cum } \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2},$ $\text{obținem } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+2} \leq (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+2)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	3p