Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_3 = 11$ și $a_4 = 13$. Primul termen al acestei progresii este egal cu:

A. -1 **B**. 3 **C**. 7 **D.** 11

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x+m$, unde m este număr real. Dacă vârful parabolei asociate funcției f are coordonatele egale, atunci numărul real m este egal cu:

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{x+12}=x$ este:

A. $\{-3,4\}$ **B**. $\{4\}$ **C**. $\{-3\}$ **D.** $\{-4,3\}$

5p **4.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\, n\leq 120\right\}$, acesta să fie multiplu de 25 este egală cu:

A. $\dfrac{1}{30}$ **B.** $\dfrac{4}{121}$ **C.** $\dfrac{1}{24}$ **D.** $\dfrac{29}{30}$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,5)$ și $N(4,4)$. Punctul P, situat pe axa Ox, pentru care punctele M, N și P sunt coliniare este:

A. $P(-8,0)$ **B.** $P(0,8)$ **C.** $P(0,0)$ **D.** $P(8,0)$

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 **B.** $\sqrt{3}\cos x$ **C.** $\sin x$ **D.** 1

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1-x & 2 & 3\\ 1 & 2-x & 3\\ 1 & 2 & 3-x\end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(1)=5$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr întreg p, $p\neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6-p$.

5p **c)** Determinați valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0 & x+1\\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $B(1)+B(3)=2B(2)$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)=B(x)$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x-4)^2}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a}\left(f(x+a) - f(x)\right)$ **nu** depinde de a.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-2}, & x \in (-\infty, 1) \\ \ln x + m, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Pentru $m \le 0$, demonstrați că funcția f este surjectivă.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**C**	**5p**
2.	**C**	**5p**
3.	**B**	**5p**
4.	**A**	**5p**
5.	**D**	**5p**
6.	**A**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1)=\begin{vmatrix}0&2&3\\1&1&3\\1&2&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+6+6-3-0-4=5$	**3p**
b)	$D(p)=p^2(6-p)$, pentru orice număr întreg p	**3p**
	Numerele p și $6-p$ sunt întregi, deci numărul întreg $D(p)$ este divizibil cu $6-p$	**2p**
c)	$D(n)=n^2(6-n)$, deci pentru $n=0$ și pentru orice $n\ge 6$, obținem $D(n)\le 0$ și, cum n este număr natural, valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$ se obține pentru una dintre valorile $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ sau $n=5$	**3p**
	Valoarea maximă este $D(4)=32$	**2p**
2.a)	$B(1)+B(3)=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\2&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&3\\1&1\end{pmatrix}=2B(2)$	**2p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x-1&-x\\0&-x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}-x-1&0\\-x&x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}x-1&-x\\0&-x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-1&0\\-x&x-1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$	**1p**

c)	$B(x)\cdot B(x)=\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-4)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^2}{x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^2=1$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x(x-4)^2\cdot x}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to4}x^2=$	**3p**
	$=16$	**2p**
c)	**c)** $\dfrac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\dfrac{1}{a}\left(a+\dfrac{16}{x+a}-\dfrac{16}{x}\right)=1-\dfrac{16}{x(x+a)}$, $x\in(0,+\infty)$, unde a este număr real, $a>0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{16}{x(x+a)}\right)=1$, deci nu depinde de a	**2p**
2.a)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x^2}{x-2}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x+m)=m$ și $f(1)=m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow m=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x(x-2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2$, deci dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$ și f este continuă pe $(-\infty,1)$, mulţimea valorilor funcţiei f conține intervalul $(-\infty,0]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă pe $(1,+\infty)$, mulţimea valorilor funcţiei conţine intervalul $(m,+\infty)$ și, cum $m\le0$, funcția f este surjectivă	**3p**