

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Clasa a XI-a

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)**

- 5p** 1. Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  este egală cu 333. Al doilea termen al acestei progresii este egal cu:  
A. 30                      B. 111                      C. 222                      D. 333
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 5$ . Numărul  $(f \circ f)\left(\frac{10}{9}\right)$  este egal cu:  
A. -10                      B.  $-\frac{5}{3}$                       C. 0                      D.  $\frac{10}{9}$
- 5p** 3. Mulțimea soluțiilor ecuației  $2 \log_2(x+1) - \log_2(x+2) = \log_{\frac{1}{3}} 3$  este:  
A.  $\left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$                       B.  $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$                       C.  $\{0\}$                       D.  $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$
- 5p** 4. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin o cifră pară este egală cu:  
A.  $\frac{5}{18}$                       B.  $\frac{4}{9}$                       C.  $\frac{5}{9}$                       D.  $\frac{13}{18}$
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră triunghiul ale cărui laturi se află pe dreptele de ecuații  $d_1: y = -2x$ ,  $d_2: y = 2x$  și  $d_3: x = 2$ . Perimetrul acestui triunghi este egal cu:  
A.  $4(2 + \sqrt{5})$                       B. 24                      C.  $6\sqrt{5}$                       D.  $4(3 + \sqrt{5})$
- 5p** 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin x - \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ , unde  $x$  este număr real. Pentru orice număr real  $x$ , expresia  $E(x)$  este egală cu:  
A. 0                      B.  $2 \cos x$                       C.  $2 \sin x$                       D. 1

**SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul  $D(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 1 \\ a & a & b \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Calculați  $D(0,1)$ .
- 5p** b) Arătați că  $D(a,1) \geq 0$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă numerele  $m$  și  $n$  sunt întregi impare, atunci  $D(m,n) \neq 0$ .
2. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $A(-x) + A(x) = 2A(0)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Arătați că  $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = 0$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $m$ , știind că  $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(2019)A\left(\frac{1}{4038}\right) = mI_3$ .

1. Se consideră funcția  $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ .

5p a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p b) Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_n = f(n)$ . Demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

5p c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{f(n)} - 1)$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} a + \frac{\sin x}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x^2 + 2x}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.

5p a) Determinați numărul real  $a$  pentru care funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Pentru  $a = 1$ , determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , ecuația  $f(x) = |a|$  are cel puțin o soluție.

**Examenul de bacalaureat național 2019**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_mate-info***  
**Clasa a XI-a**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

- Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

**SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	B	5p
2.	A	5p
3.	C	5p
4.	D	5p
5.	A	5p
6.	A	5p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$D(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 0 = 4$	2p 3p
b)	$D(a,1) = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & a & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 4 =$ $= (a-2)^2 \geq 0, \text{ pentru orice număr real } a$	3p 2p
c)	$D(m,n) = m^2 + m + 4n^2 - 5mn$ , unde $m$ și $n$ sunt numere întregi impare Cum $m$ și $n$ sunt numere întregi impare, $m^2$ este impar, $4n^2$ este par și $5mn$ este impar, deci numărul întreg $D(m,n)$ este impar, de unde obținem că $D(m,n) \neq 0$	2p 3p
2.a)	$A(-x) + A(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A(0), \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 2xy+1 & 0 & -2xy+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2xy+1 & 0 & 2xy+1 \end{pmatrix}, A(2xy) = \begin{pmatrix} 2xy & 1 & -2xy \\ 1 & 0 & 1 \\ -2xy & 1 & 2xy \end{pmatrix}, \text{ pentru orice numere}$ reale $x$ și $y$	2p

	$A(x)A(y) - A(2xy) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(x)A(y) - A(2xy)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru}$ <p>orice numere reale <math>x</math> și <math>y</math></p>	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3, \text{ pentru orice număr real nenul } x$ <p><math>\underbrace{2I_3 + 2I_3 + \dots + 2I_3}_{\text{de 2019 ori } 2I_3} = 4038I_3, \text{ deci } m = 4038</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$a_n = \frac{n+1}{n+2}, \text{ deci } a_n > 0, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 1$ <p>Cum <math>a_n = 1 - \frac{1}{n+2} &lt; 1</math>, pentru orice număr natural <math>n, n \geq 1</math>, șirul <math>(a_n)_{n \geq 1}</math> este mărginit</p>	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{f(n)} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(f(n) - 1)}{\sqrt{f(n)} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right)}{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1} =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{(n+2)(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1)} = -\frac{1}{2}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	<p>Pentru orice număr real <math>a</math>, funcția <math>f</math> este continuă pe <math>(-\infty, 0)</math> și pe <math>(0, +\infty)</math></p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(a + \frac{\sin x}{x}\right) = a + 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x^2 + 2x} = 0 \text{ și } f(0) = 0, \text{ deci funcția}$ <p><math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R} \Leftrightarrow a = -1</math></p>	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$a = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}, x \in (-\infty, 0)$ $\left \frac{\sin x}{x}\right  \leq \frac{1}{ x } \text{ și } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{ x } = 0$ <p>Obținem <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1</math>, deci dreapta de ecuație <math>y = 1</math> este asimptotă orizontală spre <math>-\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ și } f \text{ este continuă pe } [0, +\infty), \text{ deci mulțimea valorilor funcției}$ <p><math>f</math> conține intervalul <math>[0, +\infty)</math></p> <p>Cum pentru orice număr real <math>a,  a  \in [0, +\infty)</math>, ecuația <math>f(x) =  a </math> are cel puțin o soluție</p>	<b>3p</b> <b>2p</b>