

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = \log_5 7 + \log_5 35 - 2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.
- 5p 2. Știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, calculați $S = (f \circ f)(1) + (f \circ f)(2) + \dots + (f \circ f)(10)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 1) + 3 = \log_2(7x^2 + 9)$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{i, i^2, i^3, i^4\}$, unde $i^2 = -1$, acesta să fie număr real.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, n)$, $N(n, 3)$ și $P(2n, 5)$, unde n este număr natural. Știind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinați numărul natural n .
- 5p 6. Arătați că $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(X(-1)) = 12$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(X(a) - I_3) = 0$.
- 5p c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(3, 9)$ și $C(a, a^2)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.
2. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & 3x \\ -3x & 1-3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Demonstrați că $M(x)M(y) = M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.
- 5p c) Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M(\sqrt{x})M(\sqrt{x+5}) = M(5)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x}$.
- 5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(mx)}{f(x)} = m^2 - m$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2a - 4, & x \in (-\infty, 2) \\ 2^{x-1} - 2, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4f(x)}{(1-2x)^2} = 1$, pentru orice număr real a .

- 5p** | **b)** Demonstrați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a .
- 5p** | **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a , $a < 3$, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1, 3)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = \log_5(7 \cdot 35) - \log_5\left(\frac{7}{25}\right)^2 =$ $= \log_5\left(7 \cdot 35 \cdot \frac{25^2}{7^2}\right) = \log_5(5^5) = 5 \in \mathbb{N}$	2p 3p
2.	$S = f(f(1)) + f(f(2)) + \dots + f(f(10)) = 5 + 6 + 7 + \dots + 14 =$ $= 95$	3p 2p
3.	$\log_2(x^2 + 1) + \log_2 8 = \log_2(7x^2 + 9) \Rightarrow 8(x^2 + 1) = 7x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 1$ $x = -1 \text{ sau } x = 1, \text{ care verifică ecuația}$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile În mulțimea A sunt 2 numere reale, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	1p 2p 2p
5.	$\overrightarrow{MN} = (n-1)\vec{i} + (3-n)\vec{j}, \overrightarrow{MP} = (2n-1)\vec{i} + (5-n)\vec{j}$ $\frac{n-1}{2n-1} = \frac{3-n}{5-n} \text{ și, cum } n \text{ este număr natural, obținem } n = 2$	2p 3p
6.	$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$X(-1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(-1)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 18 + 3 + (-4) - (-9) - 12 - 2 = 12$	2p 3p
b)	$\det(X(a) - I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ a & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 - 4a$ $2a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } a = 2$	3p 2p
c)	$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 \text{ și, cum } ABC \text{ este triunghi, obținem } a^2 - 5a + 6 \neq 0$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \Delta , \text{ deci } a^2 - 5a + 6 < 6 \text{ și, cum } a \text{ este număr natural, obținem } a = 1 \text{ sau } a = 4$	2p 3p

2.a)	$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1+3y+3x+9xy-9xy & 3y+9xy+3x-9xy \\ -3x-9xy-3y+9xy & -9xy+1-3y-3x+9xy \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 1+3(x+y) & 3(x+y) \\ -3(x+y) & 1-3(x+y) \end{pmatrix} = M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$M(x)M(-x) = M(x+(-x)) = M(0) = I_2$, pentru orice număr real x	2p
	$M(-x)M(x) = M((-x)+x) = M(0) = I_2$, pentru orice număr real x , deci inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x) = \begin{pmatrix} 1-3x & -3x \\ 3x & 1+3x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$	3p
c)	$M(\sqrt{x} + \sqrt{x+5}) = M(5)$, deci $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$	2p
	$x = 4$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2} = 1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x} = -1$, deci dreapta de ecuație $y = x - 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(mx)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{m^2x^2 - mx - 2}{mx} \cdot \frac{x}{x^2 - x - 2} \right) = m$	3p
	Cum m este nenul, din $m = m^2 - m$, obținem $m = 2$, deci există un singur număr natural nenul m care verifică relația	2p
2.a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4f(x)}{(1-2x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x^2 - ax + 2a - 4)}{1 - 4x + 4x^2} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4ax + 8a - 16}{4x^2 - 4x + 1} = 1$, pentru orice număr real a	3p
b)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 - ax + 2a - 4) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2^{x-1} - 2) = 0$ și, cum $f(2) = 0$,	3p
	obținem $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, deci funcția f este continuă în $x = 2$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a , funcția f este continuă pe $(-\infty, 2)$ și pe $(2, +\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a	2p
c)	$f(1) = a - 3$, $f(3) = 2$	3p
	Pentru orice număr real a , $a < 3$, $f(1) \cdot f(3) < 0$ și, cum funcția f este continuă, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1, 3)$	2p