

**Examenul de bacalaureat național 2018**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**Clasa a XI-a**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- |    |                                                                                                                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5p | 1. Determinați numărul complex $z$ , știind că $2\bar{z} + iz = 4 + 5i$ , unde $\bar{z}$ este conjugatul lui $z$ .                                                        |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 3 - 2x$ . Determinați valorile reale ale lui $x$ pentru care $(f \circ f)(x) < x$ .              |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{27} = 3^3$ .                                                                                   |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , aceasta să conțină numai numere pare. |
| 5p | 5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$ , $AD = 4$ și punctul $M$ , mijlocul laturii $CD$ . Calculați lungimea vectorului $\vec{v} = \vec{DC} + \vec{BM}$ .       |
| 5p | 6. Se consideră $E(x) = \sin \frac{2x}{3} - \cos \frac{8x}{3}$ , unde $x$ este număr real. Arătați că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.                 |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- |    |                                                                                                                                                                                                                                       |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | 1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a^2 + a & a^2 - a & 1 \\ a^2 - a & a^2 + a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde $a$ este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(-2)) = -32$ .                                                                                                                                                                                                   |
| 5p | b) Determinați valorile reale ale lui $x$ pentru care $\det(A(x) - xI_3) \geq 0$ .                                                                                                                                                    |
| 5p | c) În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $P_a(a^2 + a, a^2 - a)$ , unde $a$ este număr real. Demonstrați că pentru orice număr real nenul $a$ , punctele $P_a$ , $P_{-a}$ și $O$ <b>nu</b> sunt coliniare.                 |
|    | 2. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real.                                                                                                     |
| 5p | a) Demonstrați că $M(x) \cdot M(-x) = M(0)$ , pentru orice număr real $x$ .                                                                                                                                                           |
| 5p | b) Calculați inversa matricei $M(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ .                                                                                                                                                                           |
| 5p | c) Arătați că $\det(M(1) + M(2) + \dots + M(n)) = 2n^2(2^n - 1)$ , pentru orice număr natural nenul $n$ .                                                                                                                             |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- |    |                                                                                                                            |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | 1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ .                    |
| 5p | a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .                                                                     |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ .                                     |
| 5p | c) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$ este descrescător. |

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2^x + \sin(x-1) + m, & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$ , unde  $m$  este număr real.

5p a) Arătați că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{3}{4}$ .

5p b) Determinați numărul real  $m$  pentru care funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Pentru  $m = -\frac{5}{4}$ , demonstrați că ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o soluție în intervalul  $(0, 2)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2018**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_mate-info***  
**Clasa a XI-a**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1. | $2(a - ib) + i(a + ib) = 4 + 5i \Leftrightarrow (2a - b) + i(a - 2b) = 4 + 5i$ , unde $z = a + ib$ , $a, b \in \mathbb{R}$<br>$a = 1$ , $b = -2$ , deci $z = 1 - 2i$                                                                                                                                                                                | 3p<br>2p       |
| 2. | $(f \circ f)(x) = 3 - 2(3 - 2x) = 4x - 3$<br>$4x - 3 < x \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$                                                                                                                                                                                                                                                        | 2p<br>3p       |
| 3. | $3^{x^2+1} \cdot 3^1 = 3^3 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3$<br>$x = -1$ sau $x = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3p<br>2p       |
| 4. | Mulțimea $A$ are $C_6^2$ submulțimi cu două elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 15<br>Mulțimea $A$ are $C_3^2$ submulțimi cu două elemente care conțin numai numere pare, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 3<br>$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ | 1p<br>2p<br>2p |
| 5. | $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ , deci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$<br>$AM = 4\sqrt{2}$                                                                                                                                                                                       | 3p<br>2p       |
| 6. | $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} =$<br>$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \in \mathbb{N}$                                                                                                                                                                                                        | 2p<br>3p       |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                      |          |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $A(-2) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-2)) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$<br>$= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 36 = -32$        | 2p<br>3p |
| b)   | $\det(A(x) - xI_3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 - x & 1 \\ x^2 - x & x^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - x \end{vmatrix} = x^2(1-x)(2x-1)$<br>$x^2(1-x)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{0\}$ | 3p<br>2p |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| c)   | $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 + a & a^2 - a & 1 \\ a^2 - a & a^2 + a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a^3$ <p>Pentru orice <math>a</math> număr real nenul, obținem <math>\Delta \neq 0</math>, deci punctele <math>P_a</math>, <math>P_{-a}</math> și <math>O</math> <b>nu</b> sunt coliniare</p>                                                                       | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| 2.a) | $M(x) \cdot M(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x+x \\ 0 & 2^x \cdot 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(0), \text{ pentru orice număr real } x$ | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| b)   | <p><math>M(x) \cdot M(-x) = M(-x) \cdot M(x) = I_3</math>, pentru orice număr real <math>x</math></p> <p>Inversa matricei <math>M(x)</math> este matricea <math>M(-x) = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -x \\ 0 &amp; 2^{-x} &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></p>                                                         | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| c)   | $M(1) + M(2) + \dots + M(n) = \begin{pmatrix} n & 0 & 1+2+\dots+n \\ 0 & 2^1+2^2+\dots+2^n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ $\det(M(1) + M(2) + \dots + M(n)) = \begin{vmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 2(2^n-1) & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = 2n^2(2^n-1), \text{ pentru orice număr}$ <p>natural nenul <math>n</math></p>                                     | <p>2p</p> <p>3p</p> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1.a) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(x+1)^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 2$                                                                                                                                                  | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| b)   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} = 1$ <p>Dreapta de ecuație <math>y=1</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>        | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| c)   | $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n+1) = 1 - \frac{1}{n^2+4n+4} < 1, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ <p>Cum <math>a_n &gt; 0</math> pentru orice număr natural nenul <math>n</math>, obținem <math>a_{n+1} &lt; a_n</math>, deci șirul <math>(a_n)_{n \geq 1}</math> este descrescător</p> | <p>3p</p> <p>2p</p> |

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| <p><b>2.a)</b></p> | $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x-2-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x-2}+1)} =$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3}{(x+1)(\sqrt{3x-2}+1)} = \frac{3}{4}$                                                                                                                                                                        | <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> |
| <p><b>b)</b></p>   | <p>Pentru orice număr real <math>m</math>, funcția <math>f</math> este continuă pe <math>(-\infty, 1)</math> și pe <math>(1, +\infty)</math></p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2^x + \sin(x-1) + m) = 2 + m, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{3}{4} \text{ și } f(1) = 2 + m, \text{ deci funcția } f$ <p>este continuă pe <math>\mathbb{R} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{4}</math></p> | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |
| <p><b>c)</b></p>   | $f(0) = -\frac{1}{4} - \sin 1, \quad f(2) = \frac{1}{3}$ <p><math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R}</math> și <math>f(0) \cdot f(2) &lt; 0</math>, deci ecuația <math>f(x) = 0</math> are cel puțin o soluție în intervalul <math>(0, 2)</math></p>                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> |