Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine primul termen b_1 al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $b_2 = 12$ şi $b_5 = 96$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 4x + m = 0$. Să se determine numărul real *m*, pentru care $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+2\right) - \log_3 x = 1$.

5p **4.** Să se determine numărul natural nenul *n*, știind că mulțimea $A = \{1, 2, 3....n\}$ are exact 10 submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** Să se determine ecuaţia dreptei ce conţine punctul $A(1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + y + 1 = 0$.

5p **6.** Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă $AB = 12, AC = 16$ și $BC = 20$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $A(x) + A(0) = 2A(x-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x)\right) = 0$.

5p **c)** Dacă $B = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3)$, demonstrați că $\det(B) = 0$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 3x - y$.

5p **a)** Arătați că legea „*” nu este asociativă.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+1) * x \leq x * (x+1) + x$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (-y) = -2xy \\ 1 * x = 2 \end{cases}$

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 3e^3$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați inegalitatea $x^{2e} \leq e^{x^2}$, $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{1+x^2}\,dx = \dfrac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} f(x)dx$.

5p **c)** Dacă $I = \int_1^e \dfrac{f^2(x)}{x^3} \cdot \ln x dx$, arătați că $I \in (1,2)$.

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_5 = b_2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow q = 2$	**3p**
	$b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{12}{2} = 6$	**2p**
2.	$S = x_1 + x_2 = 4,\ P = x_1 x_2 = m$	**2p**
	${x_1}^2 + {x_2}^2 = S^2 - 2P = 16 - 2m \Rightarrow 16 - 2m = 10 \Rightarrow m = 3$	**3p**
3.	Ecuația devine $\frac{x^2+2}{x} = 3$	**2p**
	$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1,2\}$, care verifică ecuația dată.	**3p**
4.	Numărul submulțimilor cu 2 elemente este egal cu C_n^2	**2p**
	$C_n^2 = 10 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow n \in \{-4,5\},\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 5$	**3p**
5.	Pentru dreapta $d_1 : x + y + 1 = 0$ obținem $m_{d_1} = -1$ $d \perp d_1 \Rightarrow m_d = 1$	**2p**
	Dreapta care trece prin $A(1,1)$ are ecuația $d : y - y_A = m_d(x - x_A)$, adică $y - 1 = 1(x-1)$ de unde obținem ecuația $d : x - y = 0$.	**3p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic $m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$	**2p**
	$R = \frac{BC}{2} = 10$	**3p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A(x) + A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & x^2 \end{pmatrix},\ 2A(x-1) = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 2(x-1)^2 \end{pmatrix}$.	**2p**
	$A(x) + A(0) = 2A(x-1) \Rightarrow x^2 = 2(x-1)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$, cu soluțiile reale $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ și $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. Așadar $S = \left\{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right\}$	**3p**
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = x^2 - 9$	**2p**
	Din $\det(A(x)) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. Deci $S = \{-3, 3\}$	**3p**
c)	$\det(B) = \det(A(1) \cdot A(2) \cdot A(3)) = \det(A(1)) \cdot \det(A(2)) \cdot \det(A(3))$	**2p**
	Din **b)** $\Rightarrow \det(A(3)) = 0$, de unde $\det(A(1)) \cdot \det(A(2)) \cdot \det(A(3)) = \det(A(1)) \cdot \det(A(2)) \cdot 0$. Deci $\det(B) = 0$.	**3p**

2.a)	Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$. Atunci: $(x*y)*z=(2xy+3x-y)*z=2(2xy+3x-y)z+3(2xy+3x-y)-z=$ $=4xyz+6xz-2yz+6xy+9x-3y-z$ ***(1)*** $x*(y*z)=x*(2yz+3y-z)=2x(2yz+3y-z)+3x-(2yz+3y-z)=$ $=4xyz+6xy-2xz+3x-2yz-3y+z$ ***(2)***. Din ***(1)*** și ***(2)*** rezultă că nu pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$ $(x*y)*z=x*(y*z)$, deci legea „*” nu este asociativă.	**2p** **3p**
b)	$(x+1)*x=2(x+1)x+3(x+1)-x=2x^2+4x+3$ $x*(x+1)=2x(x+1)+3x-(x+1)=2x^2+4x-1$ Din $(x+1)*x\le x*(x+1)+x\Rightarrow 2x^2+4x+3\le 2x^2+5x-1\Rightarrow x\ge 4$. Deci $x\in[4,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$x*(-y)=2x(-y)+3x+y=-2xy+3x+y$ iar $1*x=2x+3-x=x+3$ Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}3x+y=0\\x+3=2\end{cases}$, cu $x=-1$ și $y=3$. Așadar, $S=\{(-1,3)\}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x^2-(\ln x)\cdot(x^2)'}{x^4}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1-2\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e^3}}=3e^3$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-2\ln x=0\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$; f este strict crescătoare pe $\left(0,\sqrt{e}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, $y_{\max}=f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ $\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x^2}\le\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow 2e\ln x\le x^2\Leftrightarrow \ln x^{2e}\le x^2\Leftrightarrow e^{\ln x^{2e}}\le e^{x^2}\Leftrightarrow x^{2e}\le e^{x^2}$.	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^1\left(x+x^3\right)dx=$ $=\left.\dfrac{x^2}{2}\right\|_0^1+\left.\dfrac{x^4}{4}\right\|_0^1=\dfrac{3}{4}$.	**2p** **3p**
b)	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\left(1+x^2\right)'\sqrt{1+x^2}\,dx=$ $=\left.\dfrac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}\right\|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{3}(27-8)=\dfrac{19}{3}$.	**2p** **3p**
c)	$I=\int_1^e\dfrac{x^2+x^4}{x^3}\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln x\,dx+\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx+\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=$ $==\left.\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right\|_1^e+\left.\dfrac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^e-\left.\dfrac{x^2}{4}\right\|_1^e=\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+3}{4}$. Cum $e\in\left(\sqrt{5},3\right)\Rightarrow I\in(2,3)$.	**2p** **3p**