Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că $\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)$ este număr întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+3x+m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați numerele reale m pentru care graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+2}-x=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{0,1,2,\ldots,2026\}$, acesta să fie un multiplu al lui 26.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, astfel încât vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au aceeași lungime. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Demonstrați că, pentru orice număr real x, are loc egalitatea $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2(x+\pi)=1$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{e} & \mathrm{e}\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-1)\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați matricea $Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A(1)\cdot Y=B$.

2. Se consideră $a\in(0,+\infty)$. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=a^{-1}(x+a)(y+a)-a$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $a\circ(-a)=-a$.

5p **b)** Demonstrați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea „$\circ$”.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}$.

5p **c)** Demonstrați că $x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul real $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Arătați că $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$, pentru orice număr natural $n \ge 2$.

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)=(x+2)+i\sqrt{2}(1-x)$	**3p**
	Trebuie ca $1-x=0$ și $x+2\in\mathbb{Z}$. Obținem $x=1$	**2p**
2.	$\Delta=9-8m$	**2p**
	G_f intersectează Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale $\Leftrightarrow$ $\Delta>0$ $\Leftrightarrow$ $m\in\left(-\infty,\frac{9}{8}\right)$	**3p**
3.	$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3=(x+2)^3$ de unde obținem $(x+2)\left[(x+2)^2-1\right]=0$	**3p**
	Rezultă $(x+2)(x+1)(x+3)=0$, de unde $x\in\{-3,-1,-2\}$, care convin	**2p**
4.	Sunt 2027 de numere în M, deci numărul cazurilor posibile este 2027	**2p**
	Numărul multiplilor lui 26 este dat de numărul valorilor $n\in\mathbb{N}$ care au proprietatea că $0\le 26n\le 2027$ $\Leftrightarrow$ $0\le n\le\frac{2027}{26}$ $\Leftrightarrow$ $n\in\{0,1,2,\dots,77\}$, deci avem 78 de cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{78}{2027}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ Considerăm paralelogramul $ABDC$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$	**2p**
	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|$ $\Leftrightarrow$ $AD=BC$, deci $ABDC$ este dreptunghi. Rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A	**3p**
6.	Pentru orice număr real x, avem succesiv $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ și $\cos(x+\pi)=\cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=-\cos x$	**3p**
	Rezultă $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2(x+\pi)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$\det\left(A(-1)\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{-1}\end{vmatrix}=$	**2p**

	$=\mathrm{e}^{-1}+0+0-0-0-0=\frac{1}{\mathrm{e}}$	3p
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y+x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y\end{pmatrix}$ Rezultă $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x+y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{x+y}\end{pmatrix}=A(x+y)$	3p 2p
c)	Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $A(x)\cdot A(-x)=A(x-x)=A(0)=I_3$, de unde deducem că matricea $A(x)$ este inversabilă și $(A(x))^{-1}=A(-x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $Y=(A(1))^{-1}\cdot B$, adică $Y=A(-1)\cdot B$. Rezultă $Y=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{e} & \mathrm{e}\end{pmatrix}$, de unde obținem $Y=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.	2p 3p
2.a)	$a\circ(-a)=\frac{1}{a}(a+a)(-a+a)-a=$ $=\frac{1}{a}\cdot 2a\cdot 0-a=-a$.	2p 3p
b)	Pentru orice număr real x, are loc $x\circ 0=\frac{1}{a}(x+a)(0+a)-a=x+a-a=x$ Observăm că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă, deci $0\circ x=x\circ 0=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, adică 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.	2p 3p
c)	$x\circ x'=0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}(x+a)(x'+a)-a=0 \Leftrightarrow (x+a)(x'+a)=a^2$ Pentru $x=-a$ avem $0\cdot(x'+a)=a^2$, imposibil, deci $-a$ nu este simetrizabil în raport cu „$\circ$”. Pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ obținem $x'=-a+\frac{a^2}{x+a}\in\mathbb{R}$. Deoarece legea „$\circ$” este comutativă, deducem că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$, există $x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0$, adică toate elementele din $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.	2p 3p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-(x)'+\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{x^2+1}-1+x^2=$ $=\frac{1-x^2-1+x^4+x^2}{x^2+1}=\frac{x^4}{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+1}\cdot\frac{1}{5x^4}=$	3p

	$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{5\cdot\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{5}$	**2p**
c)	Cum $f'(x)=\frac{x^4}{x^2+1}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x>0$, avem $f(x)>f(0)$, adică $\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}>0$, iar de aici rezultă că $x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$. Cum $g'(x)=f'(x)-x^4$, rezultă $g'(x)=\frac{x^4}{x^2+1}-x^4=\frac{-x^6}{x^2+1}<0$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Atunci funcția g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x>0$, avem $g(x)<g(0)$, adică $\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}<0$, iar de aici rezultă că $\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.	**2p** **3p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=$ $=\left(1-\ln(1+x)\right)\Big\|_0^1=1-\ln 2$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in[0,1]$, avem $\frac{x^n(x-1)}{1+x}\leq 0$, deci $\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x}dx\leq 0$. Deducem că $I_{n+1}-I_n\leq 0$, de unde rezultă că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	**2p** **3p**
c)	$nI_n=\int_0^1\frac{nx^{n-1}\cdot x}{1+x}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\cdot\frac{x}{1+x}\,dx=x^n\cdot\frac{x}{1+x}\Big\|_0^1-\int_0^1 x^n\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'dx=$ $=\frac{1}{2}-\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}\,dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$	**3p** **2p**