

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2i(6-i) + 3(1-4i) = 5$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 2a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, numărul 2^n să fie divizibil cu 16.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(2,4)$. Arătați că triunghiul OAB este dreptunghic în A .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 2\cos 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Arătați că $A(-1) \cdot A(x) = A(-2x-1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care $A(-1) \cdot (A(m) + A(n)) = 2A(-4)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x \cdot 3^y + y \cdot 3^x$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 2 = 15$.
- 5p** b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul real nenul x pentru care $x \circ (3x) = (2x) \circ (2x)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x^2 + x)}{(x^2 + 3x + 3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) - f(y) \leq \frac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x și y , cu $x \leq 0 \leq y$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1 + 3x \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x \ln x) dx = 7$.

- | | |
|----|--|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x) - 4x - 1}{x} dx = 3$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{f(x) - 1}{x^2 \ln x} dx = a \ln 2$. |

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2i(6-i) + 3(1-4i) = 12i - 2i^2 + 3 - 12i =$ $= -2(-1) + 3 = 5$	3p 2p
2.	$f(a) = a + 5$, $(f \circ f)(a) = a + 10$, pentru orice număr real a $a + 10 = 2a$, de unde obținem $a = 10$	3p 2p
3.	$x^2 + 4x - 4 = 2x^2$, de unde obținem $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile 2^n este divizibil cu 16 dacă și numai dacă $n \geq 4$, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	2p 3p
5.	$m_{OA} = \frac{1}{3}$ $m_{AB} = -3$, deci $m_{OA} \cdot m_{AB} = -1$, de unde obținem că triunghiul OAB este dreptunghic în A	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - 2 + 2 \cdot \frac{2}{4} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) =$ $= 6 - 2 = 4$	3p 2p
b)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A(-1) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} -2x & 2x+1 \\ 4x+2 & -4x-1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} (-2x-1)+1 & -(-2x-1) \\ -2(-2x-1) & 2(-2x-1)+1 \end{pmatrix} = A(-2x-1)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A(-1) \cdot (A(m) + A(n)) = A(-2m-1) + A(-2n-1) = 2A(-m-n-1)$, pentru orice numere reale m și n $2A(-m-n-1) = 2A(-4)$, de unde obținem $m+n=3$ și, cum m și n sunt numere naturale, cu $m < n$, perechile sunt $(0,3)$ și $(1,2)$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 2 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 =$ $= 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 15$	3p 2p

b)	$x \circ 0 = x \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^x = x \cdot 1 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$0 \circ x = 0 \cdot 3^x + x \cdot 3^0 = x \cdot 1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
c)	$x \circ (3x) = x \cdot 3^x (3^{2x} + 3)$, $(2x) \circ (2x) = 4x \cdot 3^{2x}$, pentru orice număr real x	2p
	$x \cdot 3^x (3^{2x} + 3) = 4x \cdot 3^{2x}$, deci $x \cdot 3^x (3^x - 3)(3^x - 1) = 0$ și, cum x este număr real nenul, obținem $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 3x + 3) - e^x(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 3)^2} =$	3p
	$= \frac{e^x(x^2 + 3x + 3 - 2x - 3)}{(x^2 + 3x + 3)^2} = \frac{e^x(x^2 + x)}{(x^2 + 3x + 3)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + 3x + 3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + 3} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x + 3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 0$; pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$ și, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	2p
	$x \in (-\infty, 0]$, deci $f(x) \leq f(-1)$ și $y \in [0, +\infty)$, deci $f(y) \geq f(0)$ și, cum $f(-1) = \frac{1}{e}$ și $f(0) = \frac{1}{3}$, obținem $f(x) - f(y) \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{3}$, deci $f(x) - f(y) \leq \frac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x și y , cu $x \leq 0 \leq y$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 3x \ln x) dx = \int_1^2 (4x + 1) dx = \left(2x^2 + x \right) \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 + 2 - (2 + 1) = 7$	2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x) - 4x - 1}{x} dx = \int_1^e 3 \ln x dx = \int_1^e (3x)' \ln x dx = 3x \ln x \Big _1^e - 3x \Big _1^e =$	3p
	$= 3e - 3e + 3 = 3$	2p
c)	$\int_2^4 \frac{f(x) - 1}{x^2 \ln x} dx = \int_2^4 \frac{4x + 3x \ln x}{x^2 \ln x} dx = \int_2^4 \frac{4}{\ln x} \cdot (\ln x)' dx + 3 \int_2^4 \frac{1}{x} dx = 4 \ln(\ln x) \Big _2^4 + 3 \ln x \Big _2^4 =$	3p
	$= 7 \ln 2$, deci $a \ln 2 = 7 \ln 2$, de unde obținem $a = 7$	2p