

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_1 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, în care $b_3 = 40$ și $b_4 = 80$.
- 5p 2. Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 63$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, n^2 să fie număr natural de trei cifre.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(7,4)$ și C , astfel încât $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Determinați coordonatele punctului D pentru care $\overline{OD} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB = 10$, înălțimea $AD = 8$ și distanța de la punctul D la dreapta AC egală cu $4\sqrt{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 56.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - az = 1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + az = -3 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2) ale sistemului de ecuații pentru care $y_1 = x_2$ și $z_1 = y_2$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} - 2$.
- 5p a) Arătați că $1 * 4 = 3$.
- 5p b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x = 1$.
- 5p c) Demonstrați că mulțimea $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați numerele naturale n pentru care ecuația $f(x) = n$ nu are soluții.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_{-1}^2 (2x^2 + 1)f(x) dx = 3$.

5p b) Arătați că $\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = 1$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(\sqrt{e^x})} dx$. Arătați că

$$(n+1)I_n - I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = \frac{b_4}{b_3} = 2$, unde q este rația progresiei geometrice	2p
	$b_1 = \frac{b_3}{q^2}$, deci $b_1 = \frac{40}{4} = 10$	3p
2.	$f(x) = 0$ are două soluții reale distincte, deci $4 - 4m > 0$	3p
	$m \in (-\infty, 1)$	2p
3.	$3^x + 6 \cdot 3^x = 63$, deci $3^x = 9$	3p
	$x = 2$	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	Cum $10^2 \leq n^2 \leq 31^2$, obținem 22 de cazuri favorabile, deci $p = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$	3p
5.	$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$	3p
	$\overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + \vec{j}$, deci punctul D are coordonatele $(3, 1)$	2p
6.	$DC = 8$, $BD = 6$	3p
	$BC = 14$ și $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 - 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2$	3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2$, pentru orice număr real a	2p
	$\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	3p
c)	Pentru $a = 1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, \alpha + 1, 2\alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$	2p
	$\alpha_1 + 1 = \alpha_2$ și $2\alpha_1 = \alpha_2 + 1$, de unde obținem $\alpha_1 = 2$ și $\alpha_2 = 3$, deci soluțiile sunt $(2, 3, 4)$ și $(3, 4, 6)$	3p

2.a)	$1 * 4 = \sqrt{1 \cdot 4} + \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 4}} + \frac{1+4}{2} - 2 =$	3p
	$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2 = 3$	2p
b)	$x * x = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x}$, pentru orice $x \in M$	2p
	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x} = 1$, deci $2x^2 - 3x + 1 = 0$, de unde obținem $x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$, care convin	3p
c)	$x * y = \frac{(\sqrt{xy} - 1)^2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y \in M$	3p
	Pentru $x, y \in [1, +\infty)$, rezultă $\frac{x+y}{2} \geq 1$, deci $x * y \in [1, +\infty)$, de unde obținem că $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-2)}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x - (x+2)}{x^2} =$	3p
	$= \frac{6}{(x+2)^2} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x} \right) = 2 + 0 = 2$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = \ln 3$, f este continuă și, cum $1 < \ln 3 < 2$, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	3p
2.a)	$\int_{-1}^2 (2x^2 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _{-1}^2 =$	3p
	$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3$	2p
b)	$\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1} \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (2 + e^{-x}) dx$, $(n+1)I_n - I_{n+1} = \int_0^1 ((n+1)x^n - x^{n+1}) (2 + e^{-x}) dx =$	2p
	$= 2x^{n+1} \Big _0^1 - \frac{2x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 + \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x})' dx = 2 - \frac{2}{n+2} + x^{n+1} e^{-x} \Big _0^1 = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n	3p