EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025

Proba E.c)

Matematică *M_tehnologic*

Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse naturale și protecția mediului, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Să se calculeze $\sqrt{\frac{4}{9}} : 0,(6) + \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$.
5p	**2.** Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ și $g(x) = x^2$. Să se calculeze suma absciselor punctelor de intersecție ale graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Să se rezolve ecuația: $\log_5(9 - x^2) = 1$.
5p	**4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Câte numere de 3 cifre distincte formate cu elementele lui A sunt divizibile cu 5?
5p	**5.** În sistemul cartezian *xOy* se consideră punctele A(3; 2) și B(1; -1). Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de B.
5p	**6.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, se cunosc $\sin B = \frac{3}{5}$ și ipotenuza $BC = 25$. Determinați aria triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se dă matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**a)** Să se verifice dacă $\det A(2) = 3$;
5p	**b)** Să se determine $X \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $2X + A(2) = 3A(1)$;
5p	**c)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A^2(x)$ are toate elementele egale între ele.
	2. Pe mulțimea $(0, +\infty)$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
5p	**a)** Să se verifice dacă $2 \circ (-2) = 0$;
5p	**b)** Să se rezolve ecuația $x \circ 2 = \frac{9}{2}$;
5p	**c)** Să se demonstreze că $x \circ \frac{1}{x} \geq 4$, $(\forall) x \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + x$.
5p	**a)** Să se demonstreze că $f(x) + f'(x) = x + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;
5p	**b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f;
5p	**c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcțiile $f, g: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *și* $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
5p	**a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} + g(x)\right) dx$.
5p	**c)** Determinați numărul $a \in (1, \infty)$ știind că $\int_1^a g(x)\, dx = \frac{\ln a}{2}$.

EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025
Proba E.c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse naturale și protecția mediului, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează împărţind punctajul obţinut la 10.**

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$; $0,(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ $\frac{2}{3}:\frac{2}{3}+(-1)=1-1=0$.	**3p** **2p**
2.	Pentru a găsi $\mathscr{G}_f\cap\mathscr{G}_g$ avem $f(x)=g(x)\Rightarrow 2x+3=x^2\Rightarrow -x^2+2x+3=0$ cu soluţiile x_1 , x_2 Din relaţiile lui Viete deducem : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{-1}=2$	**3p** **2p**
3.	$\log_5\left(9-x^2\right)=1\Leftrightarrow 9-x^2=5^1\Leftrightarrow x^2=4$ Găseşte $x_1=2$ şi $x_2=-2$, care convin.	**3p** **2p**
4.	$\overline{abc}\ \vdots\ 5\Rightarrow c=5$ Numerele de forma $\overline{ab5}$ cu $a\neq b,\ a,\ b\in\{1,2,3,4\}$ sunt date de A_4^2 Calculează $A_4^2=\frac{4!}{2!}=12$	**1p** **2p** **1p**
5.	A’ este simetricul lui A fată de B dacă B este mijlocul segmentului AA’. Notează $A'(x,y)$ şi scrie $x_B=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\Rightarrow 1=\frac{3+x}{2}$; $y_B=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\Rightarrow -1=\frac{2+y}{2}$. Găseşte $x=-1$, $y=-4$ deci $A'(-1,-4)$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\frac{3}{5}=\frac{AC}{25}\Leftrightarrow AC=15$ Obţinem cu teorma lui Pitagora că $AB=20$ $\mathscr{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=150$.	**2p** **1p** **2p**

Subiectul II **(30 de puncte)**

1.a)	Scrie $A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. Calculează $\det A(2)=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=4-1=3$.	**2p** **3p**
1.b)	Scrie $A(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$	**1p** **3p**

	Deduce $2X=3\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $2X\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.	**1p**
1.c)	Calculează $A^2(x)=\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+1&2x\\2x&x^2+1\end{pmatrix}$ Deduce $x^2+1=2x\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1$.	**3p** **2p**
2.a)	$2\circ(-2)=2+(-2)+\frac{1}{2}+\frac{1}{-2}=$ $=2-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	**3p** **2p**
2.b)	$x\circ 2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+1=2x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$.	**2p** **3p**
2.c)	$x\circ\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+x=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$ $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ (\forall)x>0\ \left(\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow(x-1)^2\geq 0\right)\Rightarrow x\circ\frac{1}{x}\geq 4,\ (\forall)x>0$	**2p** **3p**

Subiectul III **(30 de puncte)**

1.a)	Calculează $f'(x)=\left(e^{-x}\right)'+x'=-e^{-x}+1$ Deduce $f(x)+f'(x)=\left(e^{-x}+x\right)+\left(-e^{-x}+1\right)=x+1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.	**3p** **2p**
1.b)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}+x\right)=\infty$, deci funcția nu admite asimptotă orizontală la $+\infty$ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}+1}{1}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}+x-x\right)=0$; deci $y=x$ asimptotă oblică la $+\infty$	**2p** **3p**
1.c)	Rezolvă ecuația $f'(x)=0\Rightarrow -e^{-x}+1=0\Rightarrow x=0$. Pentru $x\in(-\infty;0)$, f este strict descrescătoare, pentru $x\in(0;+\infty)$, f strict crescătoare, deci $x=0$ este punct de minim local, adică $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
2.a)	Funcția f este derivabilă și avem că: $f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=$ $=\frac{1-\ln x}{x^2}=g(x)$ deci funcția f este o primitivă a lui g.	**3p** **2p**
2.b)	$\int_1^2\left(\frac{f(x)}{x}+g(x)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=$	**3p**

	$= -\left.\frac{1}{x}\right\|_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$	**2p**
2.c)	Deoarece f este o primitivă a lui g avem că $\int_1^a g(x)\,dx = f(x)\Big\|_1^a = f(a) - f(1) = \frac{\ln a}{a}$	**3p**
	Vom avea că $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln a}{2} \Leftrightarrow a = 2$	**2p**