EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
Decembrie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii **SIMULARE**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 7 - i$. Arătați că $|z - iz| = 10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - 2x$. Determinați numărul real a pentru care $f(a+1) = f(3a) + 18$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(2x-3) = \log_2(3-x)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie impar, cu cifre distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$ și $B(2,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$, calculați $\operatorname{tg} x$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră matricile $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4) - I_2) = -8$.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că are loc egalitatea $A(x) \cdot A(2) - (x+2)A(x) = I_2$.

5p **c)** Calculați $A(1) + A(2) + A(3) + \ldots + A(9)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și comutativă $x * y = 2xy - 10x - 10y + 55$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice x și y numere reale.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 11$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați imaginea funcției f.

5p **c)** Arătați că $0 < f(x) + f(2-x) \le \frac{4\sqrt{3}}{3}$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$.

	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2-x)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{3}{2}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^{\ln 2} f(x)dx=3-2\ln 2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a astfel încât $\int_1^2 \frac{f(x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\ln\left(\frac{a+4e}{a+e^2}\right)$.

EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025
Proba E.c)
Matematică M_*șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z-iz=7-i-i(7-i)=7-i-7i+i^2=6-8i$ $\|6-8i\|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$	3p 2p
2.	$f(a+1)=3-2a, f(3a)=5-6a$ $3-2a=5-6a+18$, deci $4a=20$, avem $a=5$	2p 3p
3.	$\log_2(2x-3)=2\log_2(3-x)$, deci $2x-3=(3-x)^2$ de unde obținem $x^2-8x+12=0$ $x\in\{2,6\}$, convine numai $x=2$	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $\overline{ab}$, $b\in\{1,3,5,7,9\}$ ia 5 valori, $a\in\{1,2,...,9\}-\{b\}$ ia 8 valori, sunt $5\cdot 8=40$ cazuri favorabile, $P=\frac{4}{9}$	2p 3p
5.	Mijlocul M al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=4, y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$ Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1}{2}$. Panta mediatoarei d este $m_d=-2$. Ecuația mediatoarei este $y-y_M=m_d\cdot(x-x_M)$, respectiv $y=-2x+10$	2p 3p
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=\frac{25}{169}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{12}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}5 & 1\\16 & 3\end{pmatrix}, A(4)-I_2=\begin{pmatrix}4 & 1\\16 & 2\end{pmatrix}$ $\det(A(4)-I_2)=\begin{vmatrix}4 & 1\\16 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-16\cdot 1=-8$	2p 3p
b)	$A(x)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}x+1 & 1\\x^2 & x-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+7 & x+2\\3x^2+4x-4 & x^2+x-1\end{pmatrix}=(x+2)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2+3x+2 & x+2\\x^3+2x^2 & x^2+x-2\end{pmatrix}$ Din $A(x)\cdot A(2)-(x+2)\cdot A(x)=I_2$ deducem $\begin{pmatrix}5-x^2 & 0\\-x^3+x^2+4x-4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{cases}5-x^2=1\\-x^3+x^2+4x-4=0\end{cases}$. Din prima ecuație se obține $x\in\{-2,2\}$, care verifică și a doua ecuație.	2p 3p

c)	$A(1)+A(2)+A(3)+...+A(9)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1^2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2^2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3^2 & 2\end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix}10 & 1\\ 9^2 & 8\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}2+3+4+...+10 & 9\\ 1^2+2^2+3^2+...+9^2 & 0+1+2+...+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}54 & 9\\ 285 & 36\end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$x*y=2xy-10x-10y+55=2x(y-5)-10y+50+5=2x(y-5)-10(y-5)+5=$ $=(2x-10)(y-5)+5=2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$x*e=e*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $2(x-5)(e-5)-(x-5)=0\Leftrightarrow(x-5)(2e-11)=0$, pentru orice număr real x, rezultă $e=\frac{11}{2}$ Legea este comutativă, rezultă $x*\frac{11}{2}=\frac{11}{2}*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{11}{2}$ este elementul neutru al legii „ * ”	2p 3p
c)	Din $m*n=11$ avem $(m-5)(n-5)=3$ $(m-5,n-5)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}\Leftrightarrow(m,n)\in\{(6,8),(8,6),(4,2),(2,4)\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+1)'\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'\cdot(x+1)}{x^2+x+1}=$ $\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1}=\frac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$	2p 3p
b)	$x=1$ este punct de maxim, $f(1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ este valoarea maximă $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, f este funcție continuă, rezultă $\operatorname{Im} f=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	2p 3p
c)	Dacă $x\in[1,+\infty)$, atunci $f(x)\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ $x\in[1,+\infty)$, rezultă $2-x\in(-\infty,1]$ iar $f(2-x)\in\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Rezultă $0<f(x)+f(2-x)\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$ pentru orice $x\in[1,+\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(2-x)dx=$ $=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	3p 2p
b)	$\int f(x)dx=\int(2-x)(e^x)'dx=(2-x)e^x+\int e^xdx=(3-x)e^x+C$ $\int_0^{\ln 2}f(x)dx=(3-\ln 2)e^{\ln 2}-3=3-2\ln 2.$	3p 2p
c)	Pentru $x\in[1,2]$ avem: $\int\frac{f(x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{(2-x)e^x}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{2(e^x+3x^2)-x(e^x+6x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{e^x+6x}{e^x+3x^2}dx=\ln\left(\frac{x^2}{e^x+3x^2}\right)+C$ $\int_1^2\frac{f(x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\ln\left(\frac{4(e+3)}{e^2+12}\right)=\ln\left(\frac{a+4e}{a+e^2}\right)$, de unde obținem $a=12$	3p 2p