



EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025

Proba E.c)

Matematică M_mate-info

Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Ordonăți crescător numerele $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt[3]{15}$ și $c = \sqrt[6]{220}$.
- 5p 2. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + x$ nu este surjectivă.
- 5p 3. Determinați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 = 0$ are două soluții reale distincte.
- 5p 4. Mulțimea A are patru elemente. Determinați probabilitatea ca, atunci când alegem la întâmplare o submulțime nevidă a mulțimii A , submulțimea aleasă să aibă exact două elemente.
- 5p 5. În raport cu un reper cartezian xOy , trei dintre vârfurile paralelogramului $ABCD$ au coordonatele $A(-2, 3)$, $B(-1, 1)$ și $C(4, 2)$. Calculați lungimea diagonalei BD .
- 5p 6. Laturile triunghiului ABC au lungimile $AB = 8$, $AC = 5$, $BC = 7$. Determinați măsura unghiului A .

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr complex $z = a + b \cdot i$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, se consideră matricea
- $$A(z) = a \cdot I_3 + b \cdot B, \text{ unde } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
- 5p a) Arătați că $B^2 + I_3 = O_3$.
- 5p b) Demonstrați că $A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 \cdot z_2)$, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $A(\sqrt{5} - i) \cdot A(\sqrt{3} - i) \cdot A(\sqrt{3} + i) \cdot A(\sqrt{5} + i) = n \cdot I_3$.
2. Pe mulțimea $M = [1, \infty)$ se consideră legea de compoziție asociativă
- $$x \circ y = \log_3(3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12).$$
- 5p a) Arătați că $2024 \circ 1 = 1$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.
- 5p c) Aflați $x \in M$ cu proprietatea că $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 1)$.
- 5p b) Scrieți ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are două soluții în intervalul $(-\infty, 1)$.



2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \operatorname{arctg} x$, iar $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

5p a) Arătați că funcția $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_1^x f(t) dt$.

5p c) Determinați acea primitivă G a funcției g al cărei grafic conține punctul $A(\sqrt{3}, \ln 2)$.



EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025

Proba E.c)

Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a = \sqrt{6} = \sqrt[6]{216}$ $b = \sqrt[3]{15} = \sqrt[6]{225}$ $a < c < b$	2p 2p 1p
2.	$f(x) = x(x+1)$ este număr natural par, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ Atunci $1 \notin \text{Im}(f)$, deci funcția f nu este surjectivă	2p 3p
3.	$\Delta = m^2 - 4$ $\Delta > 0$, prin urmare $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$	2p 3p
4.	Mulțimea A are 15 submulțimi nevide, dintre care 6 au cardinalul egal cu 2 Probabilitatea evenimentului din enunț este $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D$ și $y_A + y_C = y_B + y_D$, deci $D(3, 4)$ $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = 5$	3p 2p
6.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$ Rezultă că $A = \frac{\pi}{3}$ (sau $A = 60^\circ$)	3p 2p

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1.a)	$B^2 = \begin{pmatrix} 4-5 & 0 & -2+2 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 10-10 & 0 & -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ $B^2 + I_3 = -I_3 + I_3 = O_3$	3p 2p
b)	Pentru $z_1 = a_1 + b_1i$ și $z_2 = a_2 + b_2i$, avem: $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, prin urmare $A(z_1, z_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)I_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)B$; $A(z_1) \cdot A(z_2) = (a_1 I_3 + b_1 B) \cdot (a_2 I_3 + b_2 B) = a_1 a_2 I_3 + a_1 b_2 B + a_2 b_1 B + b_1 b_2 B^2 =$ $= (a_1 a_2 - b_1 b_2)I_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)B$ și cerința este îndeplinită	2p 3p



c)	$A(\sqrt{5}-i) \cdot A(\sqrt{3}-i) \cdot A(\sqrt{3}+i) \cdot A(\sqrt{5}+i) = A((\sqrt{5}-i) \cdot (\sqrt{3}-i) \cdot (\sqrt{3}+i) \cdot (\sqrt{5}+i)) = A(24)$ $A(24) = n \cdot I_3 \Leftrightarrow 24I_3 + 0 \cdot B = nI_3 \Leftrightarrow n = 24$	3p 2p
2.a)	$2024 \circ 1 = \log_3(3^{2025} - 3^{2025} - 3^2 + 12) =$ $= \log_3 3 = 1$	2p 3p
b)	Căutăm $e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M$ $e = \log_3 4$	2p 3p
c)	$x \circ x \circ x = x \Leftrightarrow \log_3[(3^x - 3)^3 + 3] = x \Leftrightarrow (3^x - 3)^3 = 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x - 3 \in \{-1, 0, 1\}$ $3^x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \in M; 3^x - 3 = 1 \Rightarrow x = \log_3 4 \in M; 3^x - 3 = -1 \Rightarrow x = \log_3 2 \notin M$, așadar $x \in \{1, \log_3 4\}$	3p 2p

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \forall x \in (-\infty, 1)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ Ecuția asimptotei verticale (la stânga) la graficul funcției f este $x = 1$	3p 2p
c)	f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$; $f(0) = -1$, iar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$ Cum f este continuă pe domeniul său de definiție, ecuația $f(x) = m$ are două soluții în intervalul $(-\infty, 1)$ dacă și numai dacă $m \in (-\infty, -1)$	3p 2p
2.a)	F este derivabilă și $F'(x) = 1 \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} =$ $= \operatorname{arctg} x = f(x), \forall x \in (0, \infty)$, așadar funcția F este o primitivă a funcției f	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x) - F(1)}{x}$ Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x) - F(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x) - (F(1))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$	2p 3p
c)	$f'(x) + g'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci $f(x) + g(x) = k, \forall x \in (0, \infty)$. Cum $f(1) + g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in (0, \infty)$	2p



Ținând cont de cele de mai sus, $G(x) = \frac{\pi}{2} \cdot x - F(x) + C, \forall x \in (0, \infty)$.	1p
Din $G(\sqrt{3}) = \ln 2$ obținem că $C = \ln 2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 4 \right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$	2p