Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare ianuarie

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică se cunosc termenii $a_4 = 7$ și $a_9 = 22$. Calculați a_{2025}.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 3mx + 1$. Determinați numărul real m pentru care abscisa asociată vârfului parabolei funcției f este egală cu $\frac{3}{2}$.

5p **3.** Calculați $\log_4\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + \log_4\left(4 - 2\sqrt{3}\right) - \log_4 4$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1, -1)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x + 3$.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 6, AC = 10$ și $\sphericalangle A = 60°$.

SUBIECTUL al II – lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right) = -1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + 1$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 4$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1$.

SUBIECTUL al III – lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x + 1)(x - 1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}\,dx = \frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(1) = -1$.

5p **c)** Arătați că $\int_2^e \frac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare ianuarie

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_4 = a_1 + 3r$ și $a_9 = a_1 + 8r$ $r = 3,\ a_1 = -2$ $a_{2025} = 6070$	**1p** **2p** **2p**
2.	$x_v = \frac{-b}{2a}$ $a = -1, b = 3m$ $\frac{-3m}{-2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 1$	**1p** **2p** **2p**
3.	$\log_4\left(\left(4 + 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\right) - \log_4 4 = \log_4 \frac{(4^2 - 2^2 \cdot 3)}{4} =$ $\log_4 \frac{16 - 12}{4} = \log_4 \frac{4}{4} = \log_4 1 = 0$	**2p** **3p**
4.	Numerele impare sunt $\{1,3\}$ Se formează 6 numere care au ultima cifră 1 Se formează 6 numere care au ultima cifră 3. În total se formează 12 numere impare de trei cifre distincte	**1p** **2p** **2p**
5.	$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \\ d_1 : y = x + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 = 1$ $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$ $d_2 : y - y_A = m_2(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x$	**1p** **1p** **3p**
6.	Din teorema cosinusului avem că $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle A)$ $BC^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $BC^2 = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$	**1p** **2p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al II – lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(2)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 1 = -1$	**2p** **3p**

b)	$A(a)+A(-a)=\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2+a & 1\\ 1 & 2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=$ $2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x)=\begin{pmatrix}x^2-4x+5 & 4-2x\\ 4-2x & x^2-4x+5\end{pmatrix}$, $2A(1)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x^2-4x+5=2\\ 4-2x=2\end{cases}$, de unde obținem $x=1$	**3p** **2p**
2.a)	$1*2=(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)+1=$ $=1\cdot 3+1=4$	**3p** **2p**
b)	$x*x=4x^2-4x+2$, pentru orice număr real x $4x^2-4x+2=2\Rightarrow 4x^2-4x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p** **3p**
c)	$m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)+1$, pentru orice număr întreg nenul m $(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)=0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m=-2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III – lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=2\left(\frac{1}{x}\right)'+(\ln x)'$ $f'(x)=-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-2+x}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,2)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(2,+\infty)$ Deci $x=2$ este punct de extrem	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x)=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)'=\frac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x^2+4x}{x^4}=\frac{x(-x+4)}{x^4}=$ $=\frac{-x+4}{x^3}$ Pentru $x\in(0,4)\Rightarrow -x+4>0$ și $x^3>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\int_2^3(x+1)dx=\int_2^3 xdx+\int_2^3 dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_2^3+x\Big\|_2^3=$ $=\frac{3^2}{2}-\frac{2^2}{2}+3-2=\frac{7}{2}$	**3p** **2p**
b)	$f(x)=x(x^2-1)=x^3-x$ $F(x)=\int(x^3-x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+c$ $F(1)=-1\Leftrightarrow\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+c=-1\Leftrightarrow c=-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$ $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}$	 **3p** **2p**

c)	$\int_2^e \frac{f(x)\cdot \ln x}{x^2-1}dx = \int_2^e x\cdot \ln x\, dx =$	**2p**
	$= \frac{x^2}{2}\cdot \ln x \Big\vert_2^e - \int_2^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2}\cdot \ln e - \frac{4}{2}\cdot \ln 2 - \int_2^e \frac{x}{2}dx =$	
	$= \frac{e^2}{2} - 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big\vert_2^e = \frac{e^2}{2} - 2\ln 2 - \frac{e^2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$	**3p**