Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 1 + i$. Arătați că $z_1 + iz_2 = 2$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a+1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(4x - x^2\right) = 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr par, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(2,0)$ și C. Știind că punctul B este mijlocul segmentului OC, determinați distanța dintre punctele A și C.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B = \frac{\pi}{6}$ și mediana $AM = 4$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3x-3 \\ 1-x & 3x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 3$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $A(2)\cdot A(0) + A(5) = mI_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x) - A(0)\cdot A(1-x)\right) = 3$.

2. Pe mulțimea $M = (0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 1 - \sqrt{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 8 = 7$.

5p **b)** Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ \frac{3}{x} = x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\left(n \circ (n+2)\right) \circ (n+4) > \frac{n^2}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^3 + 2x^2\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = x\left(x^2 + 5x + 4\right)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}} \le x^2(x+2) \le \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in [-4,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1}\right)dx = 7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^5 \left(3x^2 - f(x)\right) dx = 2\ln 3$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\sqrt{x} - 1\right)$. Arătați că $\int_1^4 \left(a + bg(x)\right) g'(x)\, dx = 4a$, pentru orice numere reale a și b.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 + iz_2 = 3 - i + i(1+i) = 3 - i + i + i^2 =$	**3p**
	$= 3 + (-1) = 2$	**2p**
2.	$f(a) = 5 - a$, $g(a+1) = a + 3$	**2p**
	$5 - a = a + 3$, de unde obținem $a = 1$	**3p**
3.	$4x - x^2 = 3$, de unde obținem $x^2 - 4x + 3 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 3$, care convin	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 = 12$ numere	**3p**
5.	$C(4,0)$	**2p**
	$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	**3p**
6.	$AC = 4$	**2p**
	$AB = 4\sqrt{3}$, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 =$	**3p**
	$= 0 + 3 = 3$	**2p**
b)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A(5) = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$, $A(2) \cdot A(0) + A(5) = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_2$	**3p**
	$8I_2 = mI_2$, de unde obținem $m = 8$	**2p**
c)	$A(1-x) = \begin{pmatrix} 1-x & -3x \\ x & 1-3x \end{pmatrix}$, $A(x) - A(0) \cdot A(1-x) = \begin{pmatrix} 4x & -6x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(x) - A(0) \cdot A(1-x)) = 12x^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$12x^2 = 3$, de unde obținem $x = -\frac{1}{2}$ sau $x = \frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$1 \circ 8 = 1 + 8 + 1 - \sqrt{1 \cdot 8 + 1} =$	**3p**
	$= 10 - 3 = 7$	**2p**
b)	$x \circ \frac{3}{x} = x + \frac{3}{x} - 1$, pentru orice $x \in M$	**3p**
	$x + \frac{3}{x} - 1 = x$, de unde obținem $x = 3$, care convine	**2p**

c)	$n\circ(n+2)=n+2$, $(n\circ(n+2))\circ(n+4)=n+4$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$n+4>\frac{n^2}{2}$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$ sau $n=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x^2+4x)e^x+(x^3+2x^2)e^x=$	**3p**
	$=(x^3+5x^2+4x)e^x=x(x^2+5x+4)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=-1$ sau $x=0$; pentru $x\in[-4,-1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-4,-1]$ și pentru $x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,0]$	**2p**
	$f(-4)=-\frac{32}{e^4}$, $f(-1)=\frac{1}{e}$ și $f(0)=0$, deci $-\frac{32}{e^4}\leq f(x)\leq\frac{1}{e}$, de unde obținem $-\frac{32}{e^{x+4}}\leq x^2(x+2)\leq\frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x\in[-4,0]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)+\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_1^5\left(3x^2-f(x)\right)dx=\int_1^5\frac{2}{x+1}dx=2\int_1^5\frac{(x+1)'}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=2\ln 6-2\ln 2=2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^4(a+bg(x))g'(x)dx=\int_1^4 ag'(x)dx+\int_1^4 bg(x)g'(x)dx=ag(x)\Big\vert_1^4+\frac{bg^2(x)}{2}\Big\vert_1^4=$ $=a(g(4)-g(1))+\frac{b}{2}(g^2(4)-g^2(1))$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$g(1)=f(0)=-2$, $g(4)=f(1)=2$, deci $\int_1^4(a+bg(x))g'(x)dx=4a$, pentru orice numere reale a și b	**2p**