Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f(x^n)}\,dx$. Demonstrați că $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq \dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=2\cdot\lg\sqrt{10}=$	**3p**
	$=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**2p**
2.	$f(1)=a$, $(f\circ f)(1)=2a^2-1$	**2p**
	$2a^2-1=1$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
3.	$2^{x+1}\cdot 2^{3x}=32$, deci $2^{4x+1}=2^5$, de unde obținem $4x+1=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cum $110\le n+100\le 199$ și $n+100$ este pătratul unui număr natural, obținem 4 numere: 21, 44, 69 și 96, deci $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}\right)=3\vec{i}$	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x_D=3$ și $y_D=0$	**2p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}2+x^2&-1&0\\-1&1&-x\\0&-x&x^2+1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(x)-I_3=\begin{pmatrix}1+x^2&-1&0\\-1&0&-x\\0&-x&x^2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)=-x^2(1+x^2)-x^2=-x^2(2+x^2)\le 0$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$X=B\cdot A(0)\cdot A(0)$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$1*2=\dfrac{1^2+2^2+1+2}{1+2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{8}{4}=2$	**2p**
b)	$x*0=\dfrac{x^2+0^2+x+0}{x+0+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$0*x=\dfrac{0^2+x^2+0+x}{0+x+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$\dfrac{m^2+n^2+m+n}{m+n+1}=5$, de unde obținem $(m-2)^2+(n-2)^2=13$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,5)$, $(4,5)$, $(5,0)$ și $(5,4)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\sqrt{x^2+4}+(x+6)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6x+4}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{2\left(x^2+3x+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=-1$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-2,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-2)=\sqrt{128}$, $f(-1)=\sqrt{125}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, f este continuă și $11<\sqrt{125}<\sqrt{128}<12$	**3p**
	Cum f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$, f este descrescătoare pe $[-2,-1]$ și f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$, obținem că ecuația $f(x)=m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^4 e^x f(x)\,dx=\int\limits_0^4(x+1)\,dx=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^4=$	**3p**
	$=8+4=12$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1(x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=\left.(x+1)\left(-e^{-x}\right)\right\|_0^1-\left.e^{-x}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=-\dfrac{2}{e}+1-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{2e-3}{e}$	**2p**
c)	$I_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^{n-1}e^{x^n}}{x^n+1}dx=\dfrac{1}{n}\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^n\right)'e^{x^n}}{x^n+1}dx=\dfrac{1}{n}\int\limits_0^1\dfrac{e^t}{t+1}dt$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$I_n\geq\dfrac{1}{n}\int\limits_0^1\dfrac{1}{t+1}dt=\left.\dfrac{1}{n}\ln(t+1)\right\|_0^1=\dfrac{\ln 2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n, $n\geq 2$ și $I_n\leq\dfrac{1}{n}\int\limits_0^1 e^t dt=\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural nenul n, $n\geq 2$	**2p**