

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_{șt}_nat, noiembrie 2023
Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Fie $z = \frac{a-bi}{b+ai}$, să se arate că $ z = 1$ pentru orice numere reale a și b . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$. Să se determine numărul real a pentru care punctul $A(a; a)$ este situat pe graficul funcției f . |
| 5p | 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x - 2 + \sqrt{x - 1} = 0$. |
| 5p | 4. Să se determine numărul de elemente ale unei mulțimi care are 60 de submulțimi ordonate cu trei elemente. |
| 5p | 5. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(4; -3)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $d: 2x - y + 3 = 0$. |
| 5p | 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că $AB = 15$ și $\cos C = \frac{3}{5}$. |

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 1. | Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real. |
| 5p | a) Arătați că $A(-6) - 4A(0) = -3A(2)$. |
| 5p | b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A(1)X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 5p | c) Determinați perechile de numere întregi (a, b) , $a < b$, pentru care $\det(A(a)A(b) + abI_2) = 4$. |
| 2. | Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$. |
| 5p | a) Arătați că $2 * (-2) = 13$ |
| 5p | b) Să se determine elementul neutru al legii. |
| 5p | c) Să se arate că pentru orice $x, y \geq 3$ avem $x * y \geq 3$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 1. | Se consideră funcția $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de pe grafic de abscisa $x_0 = 0$; |
| 5p | c) Studiați monotonia funcției f . |
| 2. | Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3x + \frac{1}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_1^2 x f(x) dx = 11$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a și b astfel încât funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + bx^2 + \ln x$ este o primitivă a lui f . |
| 5p | c) Calculați $\int_0^1 e^x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$. |

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică M_{șt-nat}

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE simulare noiembrie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I

30 de puncte

1	$ z = \left \frac{a-bi}{b+ai} \right = \frac{ a-bi }{ b+ai } = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} = 1$	2p 3p
2	$A(a;a) \in Gf \Leftrightarrow f(a) = a$ $4a^2 + 5a + 1 = a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$	2p 3p
3	$\sqrt{x-1} = 2-2x, \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-2x \geq 0 \end{cases}$ $x = 1$ care convine	3p 2p
4	$A_n^3 = 60, n \geq 3$ $n(n-1)(n-2) = 60 \Rightarrow n = 5$	2p 3p
5	$d: 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow m = 2, d_1 \perp d \Rightarrow m_1 m = -1, m_1 = -\frac{1}{2}$ $d_1: y - y_A = m_1(x - x_A) \Rightarrow d_1: x + 2y + 2 = 0$	3p 2p
6	$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{4}{5}$ $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{15}{\frac{4}{5}} = 2R, \text{ se obține } R = \frac{75}{8}$	2p 3p

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

1a	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ Finalizare	3p 2p
	$\det(A(1)) = 1 \Rightarrow A^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p

1b	$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	3p
1c	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1-ab & b \\ -a & -ab \end{pmatrix}, \det(A(a)A(b) + abI_2) = \begin{vmatrix} 1 & b \\ -a & 0 \end{vmatrix}, a < b$ $ab = 4 \Rightarrow (1,4), (-4,-1)$	3p
2a	$2 * (-2) = 2(2-3)(-2-3) + 3$ $2 * (-2) = 13$	2p 2p 3p
2b	$\exists e \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ $x * e = x \Rightarrow e = \frac{7}{2}$	2p 3p
2c	$x, y \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ y-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2(x-3)(y-3) \geq 0$ $2(x-3)(y-3) + 3 \geq 3 \Rightarrow x * y \geq 3$	3p 2p

Subiectul al III-lea

30 puncte

1.a)	$f'(x) = (1 - \sqrt{1 - x^2})' = -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$ $= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	3p 2p												
b)	Ecuția tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $\Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = 0$	2p 3p												
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table> Se observă că f este descrescătoare pe intervalul $(-1,0]$ și crescătoare pe $[0,1)$	x	-1	0	1	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	↘	0	↗	2p 2p 1p
x	-1	0	1											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	↘	0	↗											
2.a)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 x \left(2 + 3x + \frac{1}{x} \right) dx =$ $\int_1^2 (2x + 3x^2 + 1) dx = (x^2 + x^3 + x) \Big _1^2$ $= 14 - 3 = 11$	1p 2p 2p												
b)	F primitiva a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x), x \in (0, \infty)$	1p												

	$\Rightarrow a + 2bx + \frac{1}{x} = 2 + 3x + \frac{1}{x}$ $\Rightarrow a = 2, b = \frac{3}{2}$	3p
		1p
c)	$\int_0^1 e^x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 e^x (2 + 3x) dx$ $= (2 + 3x)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 3e^x dx$ $= 5e - 2 - 3e^x \Big _0^1 = 5e - 2 - 3e + 3 = 2e + 1$	1p 2p 2p